Herglotz G.

Überreicht vom Verfasser.

Über die scheinbaren Helligkeitsverhältnisse eines planetarischen Körpers mit drei ungleichen Hauptaxen

von

G. Herglotz in München.

(Mit 8 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 23. October 1902.)

Aus den Sitzungsberichten der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturw. Classe; Bd. CXI. Abth. IIa. November 1902.

WIEN, 1902.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Druckschriften

der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien

(Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe).

Periodische Publicationen.

[Mathematik und Astronomie.]

Aus den Denkschriften 63. Bd. (1895).

Mahler, E., Zur Chronologie der Babylonier. (Vergleichungstabellen der babylonischen und christlichen Zeitrechnung von Nabonassar 747 bis 100 v. Ch.) . . . 1 K 60 h

Niessl, G. v., Untersuchungen über den Einfluss der räumlichen Bewegung des Sonnensystems auf die Vertheilung der nachweisbaren Meteorbahnen. (Mit 3 Textfiguren.) . . . . . 2 K — h

Aus den Sitzungsberichten 104. Bd. (1895).

Buchholz, H., Die Laplace'sche und die Salmon'sche Schattentheorie und das Saturnring-Schattenproblem. . . . . — K 80 h

Dantscher, V. v., Über die Ellipse vom kleinsten Umfange durch drei gegebene Punkte. (II. Mittheilung.) . . . . . — K 90 h

Hepperger, J. v., Über die Helligkeit des verfinsterten Mondes und die scheinbare Vergrößerung des Erdschattens. (Mit 2 Textfiguren.) . . . . . — K 80 h

Kohn, G., Die homogenen Coordinaten als Wurfcoordinaten. . . . . — K 10 h

Mertens, F., Über die Composition der binären quadratischen Formen. . . . . — K 70 h

— Über Dirichlet'sche Reihen. . . . . 1 K 20 h

— Über das Nichtverschwinden Dirichlet'scher Reihen mit reellen Gliedern. — K 50 h

Rupp, O., Zur synthetischen Theorie der Kreis- und Kugel-Systeme. . . . . — K 40 h

Sobotka, J., Beitrag zur Construction von Krümmungskugeln an Raumcurven. . — K 50 h

Stolz, O., Über den Convergenzkreis der umgekehrten Reihe. (Mit 1 Textfigur.) . — K 40 h

Vries, Jan de, Über Curven fünfter Ordnung mit vier Doppelpunkten. . . . . — K 30 h

Aus den Denkschriften 63. Bd. (1896).

Holetschek, J., Untersuchungen über die Größe und Helligkeit der Kometen und ihrer Schweife. I. Die Kometen bis zum Jahre 1760. . . . . 7 K 20 h

Prey, A., Über Gestalt und Lage der Milchstrasse. (Mit 1 Tafel.) . . . . . 1 K 50 h

Aus den Sitzungsberichten 105. Bd. (1896).

Biermann, O., Zur Reduction Abel'scher Integrale auf elliptische. . . . . — K 20 h

Carda, K., Elementare Bestimmung der Punkttransformationen des Raumes, welche alle Flächeninhalte invariant lassen. . . . . — K 10 h

Daublebsky v. Sterneck, R., Zur additiven Erzeugung der ganzen Zahlen. . . . — K 50 h

Haerdtl, E. v., Notiz, betreffend die Säcularacceleration des Mondes . . . . . — K 30 h

Kohn, G., Über die cubischen Raumcurven, welche die Tangentenfläche einer vorgelegten cubischen Raumcurve in vier, fünf oder sechs Punkten berühren. . . . . — K 20 h

Mandl, J., Darstellung der scheinbaren Beleuchtung krummer Flächen (directe Construction der Isophengen) (Mit 1 Tafel und 2 Textfiguren.) . . . . . 1 K — h

Mertens, F., Über die Transcendenz der Zahlen e und π. . . . . — K 40 h

Niessl, G. v., Bahnbestimmung der großen Meteore am 16. und 25. Jänner 1895. . 1 K 20 h

Sobotka, J., Einige Constructionen bezüglich der Schnittcurven von Umdrehungsflächen mit Ebenen. (Mit 2 Textfiguren.) . . . . . — K 60 h

Waelsch, E., Über die Lamé'schen Polynome zweiter Ordnung einer Form fünfter Ordnung. . . . . — K 20 h

Wirtinger, W., Über eine Eigenschaft des Potentials unter Annahme eines Green'schen Wirkungsgesetzes . . . . . — K 40 h

Zindler, K., Eine Methode, aus gegebenen Configurationen andere abzuleiten. . — K 20 h

Aus den Sitzungsberichten der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien.
Mathem.-naturw. Classe; Bd. CXI. Abth. IIa. November 1902.

16879

Über die scheinbaren Helligkeitsverhältnisse eines planetarischen Körpers mit drei ungleichen Hauptaxen

von

G. Herglotz in München.

(Mit 8 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 23. October 1902.)

Die Helligkeitsschwankungen des am 13. August 1898 entdeckten Planeten (433) Eros wurden zuerst im Februar des Jahres 1901 von Herrn Dr. E. v. Oppolzer[1] beobachtet, nachdem derselbe bereits im December des vorangehenden Jahres gelegentlich photometrischer Messungen auf einen etwaigen Lichtwechsel aufmerksam wurde, die Schwankungen aber damals noch für innerhalb der Fehlergrenzen der Beobachtung gelegen hielt.

Bald wurden jetzt die Helligkeitsänderungen von anderen Beobachtern ebenfalls bestätigt und ihr Verlauf untersucht. So gab Herr Prof. Deichmüller ihre Periode zu $2^h 37^m$ an, wobei er die Möglichkeit offen ließ, dass die Periode auch ein Multiplum dieser Größe sein könne. Dies haben auch thatsächlich die Beobachtungen der Herren Luizetl, Le Cadet, Guillaume[2] dargethan, welche eine Periode von $5^h 16^m$ angeben und zwei nahe congruente Maxima und Minima innerhalb einer solchen finden. Während man im allgemeinen diesen Lichtwechsel durch eine Rotation des Planeten, verbunden mit unregelmäßiger Gestalt oder ungleich vertheilter Reflexionsfähigkeit,

[1] A. N., Nr. 3687.

[2] Comptes rendus, CXXXII, 4. März.

erklärte, nahm Herr Ch. André[1] in Analogie zu den veränderlichen Doppelsternsystemen zwei Körper an, die sich wechselweise verdecken, und leitete aus den Lyoner Beobachtungen einzelne Daten über ihre Gestalt und relative Lage ab. Gegen diese Annahme machte Herr Prof. H. Seeliger[2] geltend, dass man unter Annahme kugelförmiger Gestalt den beiden Körpern sehr verschiedene Albedowerte zusprechen müsse und selbst dann die Thatsache zweier congruenter Maxima und Minima nicht gut erklären könne. Ferner müsse man die beiden Körper ganz ungewöhnlich nahe beisammen annehmen, was also von selbst zur Annahme eines einzigen Körpers von unregelmäßiger Gestalt hinüberleite. Herr Prof. Seeliger hob hervor, dass man sich dabei keineswegs auf eine Rotation um eine fixe Axe beschränken müsse, sondern ähnlich, wie es Gyldén[3] in der Theorie der veränderlichen Sterne gethan hat, eine allgemeine Rotationsbewegung bei drei ungleichen Trägheitsaxen voraussetzen könne, wodurch man einen auch complicierteren Verlauf der Lichtcurve jedenfalls werde darstellen können. Im folgenden ist nun auf Anregung Herrn Prof. H. Seeliger's hin der Versuch gemacht worden, den Lichtwechsel eines frei rotierenden Körpers mit unregelmäßiger Gestalt zu behandeln, jedoch von vornherein unter Beschränkung auf Oberflächen mit durchaus positivem Krümmungsmaße, die sich also nicht selbst beschatten können.

Die Darstellung der Lichtcurve beruht auf der nach Kugelfunctionen fortschreitenden Entwickelung:

$$\frac{\Gamma}{k^2} = X_0(\vartheta\varphi) + X_1(\vartheta\varphi) + X_2(\vartheta\varphi) + \ldots,$$

worin Γ die Reflexionsfähigkeit, k^2 das Krümmungsmaß eines Punktes der Oberfläche bezeichnen und, wenn n, A, B, C die Richtungen der Flächennormale und der drei Hauptträgheitsaxen sind, gesetzt ist:

---

[1] Comptes rendus, CXXXIII, 29. Juli, 5. August; A. N., Nr. 3698.

[2] A. N., 3701.

[3] Mathemat. Theorie der veränderl. Sterne. Stockholm, 1881.

$$\cos(nA) = \sin\vartheta\cos\varphi$$
$$\cos(nB) = \sin\vartheta\sin\varphi$$
$$\cos(nC) = \cos\vartheta.$$

Dabei ist identisch $X_1 = 0$, wenn $\Gamma =$ Const wird.

Die Lichtintensität setzt sich nun additiv aus den einzelnen Functionen $X_0, X_1, X_2 \ldots$ entsprechenden Formen zusammen. Man kann daher einerseits die Beleuchtung einer willkürlich vorgegebenen Fläche durch Ermittlung der zugehörigen $X_i(\vartheta,\varphi)$ bestimmen, anderseits aber auch so verfahren, dass man die Oberfläche gerade dadurch definiert, dass obige Reihe bloß eine endliche Anzahl von Gliedern enthalten soll und daher das Endresultat bei Mitnahme derselben ein völlig strenges wird. Wählt man z. B. $\Gamma =$ const und setzt:

$$\frac{\Gamma}{k^2} = X_0 + X_2,$$

so enthält dieser Ausdruck $1+5=6$ Constante, man hat daher dieselbe Allgemeinheit wie bei Annahme eines dreiaxigen Ellipsoides, dessen Hauptaxen nicht mit den geometrischen Axen zusammenfallen, kann aber für diese Fläche die Beleuchtung exact bestimmen.

Die Bewegung eines frei[1] rotierenden Körpers hängt nun bekanntlich von zwei der Zeit proportional veränderlichen Winkeln: $N_1 t$, $N_2 t$ ab, von denen der erste im wesentlichen die Präcessionsbewegung der Hauptaxe C um die Axe der invariablen Ebene, der zweite aber die Rotation des Körpers um die Hauptaxe C selbst bestimmt. Entgegen dem Falle der Erdbewegung ist hier N_1 groß gegen N_2, daher man sich die Bewegung so vorstellen kann, dass die Rotationsaxe des Körpers im Raume fix ist, nämlich normal zur invariablen Ebene, während sich ihre Lage im Inneren des Körpers fortwährend ändert. Mit Rücksicht auf dies Verhältnis zwischen N_1, N_2 wird sich also die Lichtcurve in der Form darstellen:

---

[1] Es könnte freilich noch die Anziehung der Sonne diese Bewegung erheblich modificieren, worauf zurückzukommen sich vielleicht später einmal Gelegenheit bieten wird.

$$L = \frac{1}{2} C_0 + C_1 \cos N_1 t + C_2 \cos 2N_2 t + \dots$$
$$+ S_1 \sin N_1 t + S_2 \sin 2N_1 t + \dots$$

wo C_i S_i noch von $N_2 t$ und den mittleren Längen der Sonne und des Planeten abhängen, also langsam veränderlich sind. Dabei bricht diese Reihe mit $\left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\} nN_1 t$ ab, wenn die Reihe für $\frac{\Gamma}{k^2}$ bei $X^{(n)}(\vartheta\varphi)$ abbricht. Wegen des Verschwindens von X_1 bei constantem Γ folgt hieraus, dass man selbst im einfachsten Falle, nämlich bei Beschränkung auf X^0 X^2, zwei Maxima und Minima innerhalb einer Periode $\tau_1 = \frac{2\pi}{N_1}$ erhalten wird. Man erkennt bereits hier einen einfachen Fall, in dem der Lichtwechsel zeitweilig aussetzen wird, wenn nämlich der Körper bezüglich irgendeiner Axe symmetrisch ist und die Axe der invariablen Ebene bei ihrer Bewegung im Inneren des Körpers einmal mit der ersteren zusammenfällt. Es ergibt sich in diesem Falle, dass die Lichtcurve, je flacher sie wird, desto mehr sich einer einfachen Sinuscurve mit einem Maximum und einem Minimum nähert, wie viel Glieder man in $\frac{\Gamma}{k^2}$ auch genommen hat. Zur Zeit des größten Lichtwechsels aber und bei der Annahme

$$\frac{\Gamma}{k^2} = X^0 + X^2$$

hat sie nahe die Gestalt einer Sinuscurve mit zwei Maxima und zwei Minima innerhalb einer Periode, und dies wird auch noch der Fall sein, wenn Γ schwach veränderlich, also X^1 klein ist.

Im besonderen lässt sich durch Symmetrie um die mittlere Trägheitsaxe ein Wegfallen des Lichtwechsels für längere Zeit erzeugen unter Hinzuziehung der weiteren Annahme, dass diese Axe zur Zeit $t = 0$ nahe senkrecht zur invariablen Ebene stand. Ist nämlich ζ der Winkel der Normale dieser Ebene gegen die mittlere Trägheitsaxe und ζ_0 sein Wert für $t = 0$, so oscilliert ζ zwischen ζ_0 und $\pi - \zeta_0$ hin und her und hat ein sehr

rasch ansteigendes und abfallendes Maximum $= \frac{\pi}{2}$. Es enthält nun ferner C_i und S_i je den Factor $\sin^i \zeta$, wird also nur beim Durchgange des Winkels ζ durch $\frac{\pi}{2}$ bemerkbar.

Die in VI abgeleiteten Formeln geben für ζ folgende Näherungswerte: Sind $N_1, N_2, \lambda, 0 < S < \frac{\pi}{2}$ willkürliche Constanten, so ist $\tau_1 = \frac{2\pi}{N_1}$ die kurze Periode des Lichtwechsels, $\tau_2 = \frac{\pi}{N_2}$ die Zeit von einem Auftreten desselben bis zum nächsten und die Trägheitsmomente:

$$\frac{C-A}{C} = \frac{2N_2\lambda}{\sin 2S\left\{N_1 - \frac{2N_2 S}{\pi} + N_2\lambda \operatorname{tg} S\right\}}$$

$$\frac{C-B}{C} = \frac{N_2\lambda \operatorname{ctg} S}{N_2 - \frac{2N_2 S}{\pi}},$$

und für ζ_0 und ζ hat man:

$$\sin\zeta_0 = 4e^{-\frac{\pi\lambda}{2}} \sin S \qquad \operatorname{tg}\frac{1}{2}\zeta = e^{-N_2\lambda t}\sqrt{\frac{1+e^{4N_2\lambda t - 2\pi\lambda}}{1+e^{4N_2\lambda t - 6\pi\lambda}}}.$$

Setzt man z. B. $N_2\lambda = 0{\cdot}07$, $S = \frac{\pi}{4}$, $N_1 = 30$, also $\tau_1 = 5^h02$, so ist:

für $t =$ 0 Tage	$\sin\zeta = 1{\cdot}00$
10	$0{\cdot}80$
20	$0{\cdot}46$
30	$0{\cdot}24$
40	$0{\cdot}14$
50	$0{\cdot}06$

Dabei ist für $\lambda = 2\frac{1}{3}$ sowohl wie für $\lambda = 3\frac{1}{2}$:

$$\frac{C-A}{C} = 0{\cdot}00466 \qquad \frac{C-B}{C} = 0{\cdot}00233$$

und für

$$\lambda = 2\frac{1}{3} \qquad \tau_2 = 104^d73 \qquad \zeta_0 = 4^\circ\,9'$$

$$\lambda = 3\frac{1}{2} \qquad \tau_2 = 157.08 \qquad \zeta_0 = \quad 40'$$

Was nun die umgekehrte Aufgabe, nämlich die Bestimmung der Rotationselemente aus der beobachteten Lichtcurve angeht, so dürfte hiezu der Umstand eine Handhabe bieten, dass für

$$\frac{\Gamma}{k^2} = X^{(0)} + X^{(2)},$$

also die Lichtcurve:

$$L = \frac{1}{2} C_0 + C_1 \cos N_1 t + C_2 \cos 2N_1 t + S_1 \sin N_2 t + S_2 \sin 2N_1 t$$

man erhält:

$$C_1^2 + S_1^2 = \varphi_1 \psi_1 \qquad C_2^2 + S_2^2 = \varphi_2 \psi_2, \qquad \alpha)$$

wo $\varphi_1 \varphi_2$ bloß von der Lage der invariablen Ebene abhängen, und zwar ganze Functionen der Richtungscosinus ihrer Normalen sind, deren Coefficienten sich aus dem Sonnen- und Planetenort sofort numerisch bestimmen lassen, während $\psi_1 \psi_2$ periodische Functionen des Winkels $N_2 t$ sind, deren Coefficienten noch die übrigen Unbekannten enthalten.

Hätte man nun beobachtet, dass der Lichtwechsel immer nach der Zeit τ_2 am stärksten wird, so würde man unter der Annahme, dass er durch die eben geschilderte Bewegung zustande kommt, sofort $N_2 = \frac{\pi}{\tau_2}$ kennen. Da nun:

$$\psi_1\left(t + \frac{2\pi}{N_2}\right) = \psi_1(t) \qquad \psi_2\left(t + \frac{2\pi}{N_2}\right) = \psi_2(t)$$

ist und man einerseits $C_1^2 + S_1^2$, $C_2^2 + S_2^2$ durch numerische Integration aus der beobachteten Lichtcurve für jede Zeit bestimmen kann, anderseits aber für dieselben Zeiten φ_1 φ_2 als ganze Functionen der Richtungscosinus der Axe der invariablen

Ebene bestimmen kann, deren Coefficienten bekannte Zahlen sind, so erkennt man leicht, dass man durch Division der entsprechenden Gleichungen α) für t und $t + \frac{2\pi}{N_2}$ zwei Gleichungen höheren Grades zwischen den drei Richtungscosinussen erhält. Durch verschiedene Wahl des t lassen sich beliebig viele solche Gleichungen bilden, aus denen man dann die Richtungscosinusse rational ableiten kann.

Ist dies geschehen, so kennt man $\psi_1\psi_2$ oder die in IV auftretenden PQ für jeden Zeitpunkt, daher auch die numerischen Coefficienten der trigonometrischen Entwickelung dieser Größen nach den Vielfachen von $N_2 t$. Die Vergleichung dieser Werte mit den analytischen Ausdrücken derselben wird dann die Gleichungen zur Bestimmung der übrigen Elemente liefern.

Zum Schlusse möchte ich noch meinem hochverehrten Lehrer Herrn Prof. H. Seeliger, dem ich mich tief verpflichtet fühle, meinen aufrichtigsten Dank aussprechen dürfen.

I.

Rücksichtlich der Beleuchtungsverhältnisse treten die geschlossenen Flächen in zwei Gruppen auseinander, deren Behandlung eine wesentlich verschiedene sein muss. Es kann nämlich der Fall eintreten, dass die Fläche sich zum Theile selbst beschattet, und zwar wird dies dann eintreten, wenn die Fläche nicht überall convex nach außen hin ist. Es soll nun im folgenden der weitaus einfachere Fall der Beleuchtung eines Körpers mit durchaus convexer, im übrigen beliebig gestalteter Oberfläche behandelt werden, wenn Lichtquelle und Auge in die Unendlichkeit rücken. Es sei:

$$\Gamma . f(\cos i, \cos \varepsilon) do$$

die Lichtmenge, die ein Oberflächenelement do unter dem Winkel ε ausstrahlt, wenn es selbst unter dem Winkel i beleuchtet wird, Γ sei eine Function des Ortes auf der Fläche. Dann ist die in das Auge gelangende Lichtmenge

$$H = \int \Gamma f(i, \varepsilon) do,$$

wobei die Integration über jenen Theil der Fläche zu erstrecken ist, in dem die nach außen gezogenen Normalen mit den Richtungen Körper—Lichtquelle und Körper—Auge spitze Winkel bilden. Diese Integrationsgrenzen, die hier durch Aufsuchung der beiden Tangentialcylinder zu bestimmen wären, kann man einfacher gestalten, wenn man die Fläche sphärisch abbildet, d. h. eine Einheitskugel construiert, und diejenigen Punkte der Kugel und Fläche einander zuordnet, welche parallele Normalen besitzen. Im Falle einer convexen Fläche wird diese Abbildung die Kugel einfach überdecken, während sonst das Bild der parabolischen Curve gleichsam eine Falte der Abbildung liefern würde, derart, dass die Kugel auf der einen Seite derselben mindestens zweifach überdeckt wäre. Die Abbildung des Integrationsgebietes auf der Fläche aber wird ein sphärisches Zweieck auf der Kugel, begrenzt von zwei größten Kreisen, deren Axen den Richtungen Kugel—Auge und Kugel—Lichtquelle beziehungsweise parallel sind, und i, ε werden die Winkel, welche der Kugelradius mit diesen zwei Richtungen bildet. Ist ferner $d\omega$ ein Element der Kugelfläche, so wird nach der Gauss'schen Definition der Krümmung k^2:

$$do = \frac{1}{k^2}\, d\omega,$$

somit

$$H = \int \frac{\Gamma}{k^2}\, d\omega \,.\, f(i, \varepsilon), \qquad 1)$$

d. h. man kann die Fläche ersetzen durch eine Einheitskugel, für die das Beleuchtungsgesetz aber

$$\frac{\Gamma}{k^2} f(\cos i \cos \varepsilon) d\omega$$

ist. Es ergeben also alle jene convexen Flächen, für die das Krümmungsmaß dieselbe Function der Richtungscosinusse des bezüglichen Flächenpunktes ist, genau dieselben Beleuchtungsverhältnisse. Solcher Flächen gibt es aber unendlich viele, denn die Bestimmung derjenigen, die zu einer bestimmten Function k^2 gehören, kann leicht abhängig gemacht werden von einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei Variabeln.

Sind nun $\cos(nx)$, $\cos(ny)$, $\cos(nz)$ die Richtungscosinus der Normalen in irgendeinem Punkte der Fläche, so soll sein:

$$\cos(nx) = \sin\Theta\cos\varphi \quad \cos(ny) = \sin\Theta\sin\varphi \quad \cos(nz) = \cos\Theta$$

$$\frac{\Gamma}{k^2} = \sum_0^\infty{}_n \sum_0^n{}_\nu (a_\nu^n \cos\nu\varphi + C_\nu^n \sin\nu\varphi) P_\nu^n(\cos\Theta)$$

$$P_\nu^n(\cos\Theta) = (-1)^{n+\nu}\sin^\nu\Theta\left\{\cos^{n-\nu}\Theta - \frac{(n-\nu)(n-\nu-1)}{2(2n-1)}\cos^{n-\nu-2}\Theta\right.$$

$$\left. + \frac{(n-\nu)(n-\nu-1)(n-\nu-2)(n-\nu-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}\cos^{n-\nu-4}\Theta\ldots\right\} \quad 2)$$

(P_ν^n ist hier gleich dem von Heine gebrauchten Ausdruck mal $i^{\nu+2n}$.)

Hiebei sind die $a_\nu^n b_\nu^n$ bestimmt durch folgende über die ganze Oberfläche des beleuchteten Körpers zu erstreckende Integrale:[1]

$$a_\nu^n = \frac{2n+1}{2\pi}\frac{(1.3..2n-1)^2}{(n+\nu)!\,(n-\nu)!}\int\Gamma P_\nu^n(\cos\Theta)\cos\nu\varphi\, do$$

$$b_\nu^n = \frac{2n+1}{2\pi}\frac{(1.3..2n-1)^2}{(n+\nu)!\,(n-\nu)!}\int\Gamma P_\nu^n(\cos\Theta)\sin\nu\varphi\, do \quad 3)$$

Man hat speciell für $n = 0, 1, 2$ folgende Werte:

$$a_0^0 = \frac{1}{4\pi}\int\Gamma\, do \qquad a_0^1 = -\frac{3}{4\pi}\int\Gamma\cos(nz)\, do$$

$$a_1^1 = \frac{3}{4\pi}\int\Gamma\cos(nx)\, do$$

$$a_0^2 = \frac{45}{16\pi}\int\Gamma\left(\cos^2(nz) - \frac{1}{3}\right) do$$

$$a_1^2 = -\frac{15}{4\pi}\int\Gamma\cos(nx)\cos(nz)\, do \quad 3a)$$

$$a_2^2 = \frac{15}{16\pi}\int\Gamma\,(\cos^2(nx) - \cos^2(ny))\, do$$

$$b_1^1 = \frac{3}{4\pi}\int\Gamma\cos(ny)\, do \qquad b_1^2 = -\frac{15}{4\pi}\int\Gamma\cos(ny)\cos(nz)\, do$$

$$b_2^2 = \frac{15}{8\pi}\int\Gamma\cos(nx)\cos(ny)\, do.$$

[1] Heine, Handbuch der Kugelfunctionen, I, S. 328.

Man sieht also, dass, im Falle $\Gamma = \text{const}$, $a_0^1 = a_1^1 = b_1^1 = 0$ wird. Dies tritt somit stets ein, wenn die Oberfläche in allen Punkten gleich stark reflectiert.

Es werden ferner die $a_\nu^n b_\nu^n$ stets der Bedingung genügen müssen, dass der Ausdruck:

$$\Phi = \sum_n \sum_\nu (a_\nu^n \cos \nu\varphi + b_\nu^n \sin \nu\varphi) P_\nu^n(\cos \Theta)$$

durchgehends positiv bleibt.

Die Frage nach der Beleuchtung der gegebenen Oberfläche ist also jetzt darauf zurückgeführt, die Beleuchtung einer Kugel zu finden, auf der das Beleuchtungsgesetz gilt:

$$\Phi \,.\, f(i, \varepsilon)\, d\omega$$

oder zu bestimmen:

$$H = \int \Phi \,.\, f(i, \varepsilon)\, d\omega,$$

wo die Integration über ein von zwei größten Kreisen begrenztes Zweieck zu erstrecken ist. Diese lässt sich leicht ausführen, wenn man vorerst den Ausdruck von Φ auf ein Coordinatensystem transformiert, dessen Z-Axe die Durchschnittslinie der genannten zwei Kugelkreise ist. Hiezu ist nun eine Hilfsformel nützlich, die zunächst abgeleitet werden soll.

II.

Bezeichnet man mit l, p die Länge und Poldistanz eines Punktes der Kugel, so handelt es sich darum, den Ausdruck:

$$X_n(p, l) = \sum_0^n{}_\nu (a_\nu^n \cos \nu l + b_\nu^n \sin \nu l) \,.\, P_\nu^n(\cos p) \qquad 1)$$

so zu transformieren, dass darin die Coordinaten $l'p'$ desselben Punktes, bezogen auf ein anderes Coordinatensystem, auftreten. Da die Definition der allgemeinen n^{ten} Kugelfunction unabhängig vom Coordinatensystem ist, so folgt, dass X_n in einen ebensolchen Ausdruck übergehen wird:

$$X_n'(p, l) = \sum_0^n{}_\nu (\overline{a_\nu^n} \cos \nu l' + \overline{b_\nu^n} \sin \nu l') P_\nu^n(\cos p'). \qquad 1\,a)$$

Die Bestimmung der $a_\nu^n\ \overline{b_\nu^n}$ als lineare Functionen der $a_\nu^n\ b_\nu^n$ wird erleichtert durch eine kleine Umformung von X_n, indem man statt p, l einführt:

$$\xi = \operatorname{ctg}\frac{p}{2}\, e^{li} \qquad \eta = \operatorname{ctg}\frac{p}{2}\, e^{-li}. \tag{2}$$

Man leitet nämlich aus der Gleichung:

$$\pi . P_\nu^n(\cos p) =$$
$$= i^{2n+\nu}\frac{2^n \Pi(n+\nu)\Pi(n-\nu)}{\Pi(2n)}\int_0^\pi (\cos p + i \sin p \cos\varphi)^n \cos\nu\varphi\, d\varphi$$

durch die Zerlegung:

$$\cos p + i \sin p \cos\varphi = \sin^2\frac{p}{2}\left(ie^{\varphi i} + \operatorname{ctg}\frac{p}{2}\right)\left(ie^{-\varphi i} + \operatorname{ctg}\frac{p}{2}\right)$$

und nachherige Entwickelung der n^{ten} Potenz leicht ab, dass

$$P_\nu^n(\cos p) =$$
$$= \frac{2^n \Pi(n)\Pi(n+\nu)}{\Pi(2n)\Pi(\nu)} \sin^{2n-\nu}\frac{p}{2}\cos^\nu\frac{p}{2} F\left(-n, -(n-\nu), \nu+1, -\operatorname{ctg}^2\frac{p}{2}\right) \tag{3}$$
$$= (-1)^{n-\nu}\frac{2^n \Pi(n)\Pi(n+\nu)}{\Pi(2n)\Pi(\nu)} \sin^\nu\frac{p}{2}\cos^{2n-\nu}\frac{p}{2} F\left(n, -(n-\nu), \nu+1 \quad \operatorname{tg}^2\frac{p}{2}\right).$$

Man kann daher $X_n(p, l)$ in die Form setzen:

$$X_n(pl) =$$
$$= \frac{1}{(1+\xi\eta)^n}\sum_0^n (A_\nu^n \xi^\nu + B_\nu^n \eta^\nu) F(-n, -(n-\nu), \nu+1, -\xi\eta), \tag{4}$$

wo aber

$$A_\nu^n = 2^n \frac{\Pi(n)\Pi(n+\nu)}{\Pi(2n)\Pi(\nu)} \frac{a_\nu^n - ib_\nu^n}{2}$$
$$B_\nu^n = 2^n \frac{\Pi(n)\Pi(n+\nu)}{\Pi(2n)\Pi(\nu)} \frac{a_\nu^n + ib_\nu^n}{2} \tag{4a}$$

gesetzt ist.

Es sei nun die Lage des neuen Systems $X'Y'Z'$ gegen das frühere XYZ durch die Euler'schen Winkel $\varphi\psi\vartheta$ der Figur gemäß bestimmt. Es sind dann die verschiedenen Richtungscosinus des Schemas:

	X'	Y'	Z'
X	a_1	a_2	a_3
Y	b_1	b_2	b_3
Z	c_1	c_2	c_3

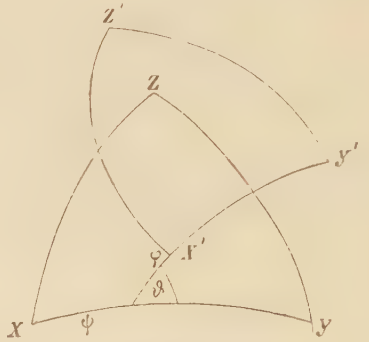

Fig. 1.

gegeben durch:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\vartheta \\
a_2 &= -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi\cos\vartheta \\
a_3 &= \sin\psi\sin\vartheta \\
b_1 &= \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\cos\vartheta \\
b_2 &= -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\sin\varphi\cos\vartheta \qquad 5) \\
b_3 &= -\cos\psi\sin\vartheta \\
c_1 &= \sin\varphi\sin\vartheta \\
c_2 &= \cos\varphi\sin\vartheta \\
c_3 &= \cos\vartheta
\end{aligned}$$

Setzt man nun:

$$\begin{aligned}
X &= \sin p\cos l & Y &= \sin p\sin l & Z &= \cos p \\
X' &= \sin p'\cos l' & Y' &= \sin p'\sin l' & Z' &= \cos p',
\end{aligned}$$

so ergibt sich mit Hilfe der zwischen XYZ und $X'Y'Z'$ obigem Schema gemäß bestehenden Gleichungen, dass die Größen:

$$\xi = \operatorname{ctg}\frac{p}{2}e^{li} \qquad \eta = \operatorname{ctg}\frac{p}{2}e^{-li}$$

und

$$\xi' = \operatorname{ctg}\frac{p'}{2}e^{l'i} \qquad \eta' = \operatorname{ctg}\frac{p'}{2}e^{-l'i}$$

verknüpft sind miteinander durch die einfache Beziehung:

$$\xi = \frac{\alpha\xi' + \beta}{\gamma\xi' + \delta} \qquad \eta = \frac{\alpha_0\eta' + \beta_0}{\gamma_0\eta' + \delta_0} \quad [1] \qquad 6)$$

wenn man setzt:

$$\alpha = \cos\frac{\vartheta}{2} e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}} \qquad \gamma = i\sin\frac{\vartheta}{2} e^{i\frac{\varphi-\psi}{2}}$$

$$\beta = i\sin\frac{\vartheta}{2} e^{-i\frac{\varphi-\psi}{2}} \qquad \delta = \cos\frac{\vartheta}{2} e^{-i\frac{\varphi+\psi}{2}} \qquad 6a)$$

und mit $\alpha_0\beta_0\gamma_0\delta_0$ die conjugierten Größen bezeichnet.

Man sieht, dass:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1 \quad \text{oder} \quad \alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 = 1$$

und dass:

$$\gamma = -\beta_0 \qquad \delta = \alpha_0$$

ist.

Diese Werte von ξ, η hat man also einfach in $X_n(pl)$ einzusetzen, und es muss sich die Identität ergeben:

$$\sum_\nu \frac{A_\nu\xi^\nu + B_\nu\eta^\nu}{(1+\xi\eta)^n} F_\nu(-\zeta\eta) = \sum_\mu \frac{\bar{A}_\mu\xi'^\mu + \bar{B}_\mu\eta'^\mu}{(1+\xi'\eta')^n} F_\mu(-\xi'\eta')$$

für:

$$\xi = \frac{\alpha\xi' + \beta}{-\beta_0\xi' + \alpha_0} \qquad \eta = \frac{\alpha_0\eta' + \beta_0}{-\beta\eta' + \alpha},$$

wenn man zur Kürze setzt:

$$F_\nu(-\xi\eta) = F(-n, -n+\nu, \nu+1 - \xi\eta).$$

Da diese Gleichung identisch für ξ', η' bestehen muss, so kann man $\eta' = 0$ setzen und ersieht hieraus, dass:

$$\bar{A}_\mu = \sum_0^n (\rho_\nu A_\nu + \sigma_\nu B_\nu) \qquad 7)$$

[1] Näheres über diese Parameter $\alpha\beta\gamma\delta$ ist enthalten in: Klein-Sommerfeld, Theorie des Kreisels, 1. Heft, S. 21.

sein wird, wo ρ_ν und σ_ν die Coefficienten von ξ'^μ in den Entwickelungen von:

$$\frac{\xi^\nu}{(1+\xi\eta)^n} F_\nu(-\xi\eta), \quad \text{beziehungsweise} \quad \frac{\eta^\nu}{(1+\xi\eta)} F_\nu(-\xi\eta)$$

für:

$$\xi = \frac{\alpha\xi'+\beta}{-\beta_0\xi'+\alpha_0} \qquad \eta = \frac{\beta_0}{\alpha}$$

sind.

Setzt man $x = \frac{\beta}{\alpha}$, $y = \frac{\alpha_0}{\beta_0}$ und schreibt ξ statt ξ', so hat man also nach ξ Potenzen zu entwickeln:

$$\varphi = (\xi+x)^\nu \cdot (\xi- y)^{n-\nu} F\left(-n, -n+\nu, \nu+1, \frac{\xi+x}{\xi-y}\right)$$

$$\psi = (\xi-y)^\nu \cdot (\xi- y)^{n-\nu} F\left(-n, -n+\nu, \nu+1, \frac{\xi+x}{\xi-y}\right).$$

Um mit ψ zu beginnen, so ist zunächst:

$$\psi = \sum_0^{n-\nu} \frac{\Pi(n)\Pi(\nu)\Pi(n-\nu)}{\Pi(\tau)\Pi(n-\tau)\Pi(n-\nu-\tau)\Pi(\nu+\tau)} (\xi-y)^{\lambda-\tau}(\xi+x)^\tau,$$

also der Coefficient von ξ^μ:

$$(\psi)_\mu = (-y)^{n-\mu}\Pi(n)\Pi(\nu)\Pi(n-\nu)\sum_0^{n-\nu}\sum_{\tau_1}^{\sigma_2} \frac{\left(-\frac{x}{y}\right)^\sigma}{\Pi(\sigma)\Pi(\tau-\sigma)\Pi(n-\mu-\sigma)\Pi(\mu+\sigma-\tau)\Pi(n-\nu-\tau)\Pi(\nu+\tau)},$$

worin:

$\sigma_1 = 0$ für $\tau < \mu$ $\sigma_2 =$ die kleinere der Zahlen:

$\sigma_1 = \tau - \mu$ $\tau > \mu$ τ und $n - \mu$.

Vertauscht man hier die Summationsordnung bezüglich τ und σ und bemerkt die beiden Gleichungen:

$$\sum_{\tau}^{\nu+\sigma \mid n-\nu} \frac{1}{\Pi(\tau-\sigma)\,\Pi(n-\sigma-\tau)\,\Pi(\mu+\sigma-\tau)\,\Pi(\nu+\tau)} = \frac{\Pi(n+\mu)}{\Pi(n-\nu-\sigma)\,\Pi(n)\,\Pi(\mu)\,\Pi(\mu+\nu+\sigma)} \qquad 8)$$

$$\sum_{\sigma}^{n-\nu \mid n-\mu} \frac{\left(-\frac{x}{y}\right)^{\sigma}}{\Pi(\sigma)\,\Pi(n-\nu-\sigma)\,\Pi(n-\mu-\sigma)\,\Pi(\mu+\nu+\sigma)} = \frac{F\left(-n+\nu, -n+\mu, \nu+\mu+1, -\frac{x}{y}\right)}{\Pi(n-\nu)\,\Pi(n-\mu)\,\Pi(\mu+\nu)},$$

wo von den beiden oberen Summationsgrenzen stets die kleinere zu nehmen ist, so folgt:

$$(\psi)_\mu = \frac{(-y)^{n-\mu}\,\Pi(\nu)\,\Pi(n+\mu)}{\Pi(\mu+\nu)\,\Pi(\mu)\,\Pi(n-\mu)}\,F\left(-n+\nu, -n+\mu, \nu+\mu+1, -\frac{x}{y}\right). \qquad 9)$$

Was nun φ angeht, so bemerke man, dass φ und ψ ineinander übergehen, wenn man $-y$, $-x$ statt x, y schreibt, also:

$$(\varphi)_\mu = \frac{(x)^{n-\mu}\,\Pi(\nu)\,\Pi(n+\mu)}{\Pi(\mu+\nu)\,\Pi(\mu)\,\Pi(n-\mu)}\,F\left(-n+\nu, -n+\mu, \nu+\mu+1, -\frac{y}{x}\right). \qquad 10)$$

Damit ist aber sofort:

$$\frac{\Pi(n+\mu)}{\Pi(n-\mu)\,\Pi(\mu)}\,\overline{A}_\mu^n = (-1)^n \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-\mu} (\alpha\beta_0)^n \sum_0^n A_\nu^n \frac{\Pi(\nu)}{\Pi(\mu+\nu)} \left(\frac{\alpha}{\beta_0}\right)^\nu F\left(-n+\nu,\ -n+\mu,\ \nu+\mu+1,\ -\frac{\alpha\alpha_0}{\beta\beta_0}\right)$$

$$+ (-1)^n \left(\frac{\alpha_0}{\beta_0}\right)^{n-\mu} (\alpha\beta_0)^n \sum_0^n B_\nu^n \frac{\Pi(\nu)}{\Pi(\mu+\nu)} \left(\frac{\beta_0}{\alpha}\right)^\nu F\left(-n+\nu,\ -n+\mu,\ \nu+\mu+1,\ -\frac{\beta\beta_0}{\alpha\alpha_0}\right) \qquad 11)$$

und offenbar wird B_μ^n das conjugierte dieses Ausdruckes sein.

Setzt man nun weiter:

$$\overline{a}_\mu^n - i\overline{b}_\mu^n = 2^{n+1} \frac{\Pi(n)\,\Pi(n+\mu)}{\Pi(2n)\,\Pi(\mu)}\,\overline{A}_\mu^n, \qquad \overline{a}_\mu^n + i\overline{b}_\mu^n = 2^{n+1} \frac{\Pi(n)\,\Pi(n+\mu)}{\Pi(2n)\,\Pi(\mu)}\,B_\mu^n, \qquad 12a)$$

so wird:

$$X_n = \sum_\mu (\overline{a}_\mu^n \cos \mu l' + \overline{b}_\mu^n \sin \mu l')\, P_\mu^n(\cos p'). \qquad 12)$$

Man kann daher, wenn man für $\alpha\beta$ ihre Werte einsetzt und der einfacheren Darstellung halber die Bedeutung von ψ und φ ein wenig abändert, folgendes Resultat aussprechen:

I. Führt man in der Function:

$$X_n(l, p) = \sum (a_\nu^n \cos \nu l + b_\nu^n \sin \nu l)\, P_\nu^n(\cos p)$$

neue Coordinaten $l'p'$ ein, die sich auf ein System $X'Y'Z'$ beziehen, dessen Lage gegen das frühere durch $\varphi\psi\vartheta$ derart bestimmt wird, dass in der Figur;

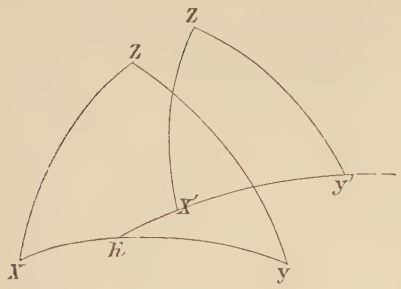

Fig. 2.

$$\text{arc } XK = \psi + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{arc } KX' = \varphi + \frac{\pi}{2}$$

$$\sphericalangle\, X'KY = \vartheta$$

ist, so geht $X_n(l, p)$ über in den Ausdruck:

$$\overline{X_n} = \sum_0^n{}' (\overline{a_\mu^n} \cos \mu(l'+\varphi) + \overline{b_\mu^n} \sin \mu(l'+\varphi)) P_\mu^n(\cos p'),$$

wobei Σ' bedeutet, dass für $\mu = 0$ die Hälfte des Summanden zu nehmen ist, und wenn man noch setzt:

$$a_\nu^n = c_\nu^n \cos \gamma_\nu^n \qquad b_\nu^n = c_\nu^n \sin \gamma_\nu^n,$$

so sind die $a_\mu^n\, b_\mu^n$ dann gegeben durch

$$\overline{a_\mu^n} = \sum_0^n{}_\nu\, c_\nu^n \cos(\nu\psi - \gamma_\nu^n)\, U_{\nu\mu}^n(\vartheta)$$

$$-\overline{b_\mu^n} = \sum_0^n{}_\nu\, c_\nu^n \sin(\nu\psi - \gamma_\nu^n)\, V_{\nu\mu}^n(\vartheta). \qquad 13)$$

Dabei sind unter $U_{\nu\mu}^n\, V_{\nu\mu}^n$ folgende Functionen von $x = \cos\vartheta$ zu verstehen:

$$U_{\nu\mu}^n = \frac{2^{-n}\,\Pi(n+\nu)}{\Pi(n-\mu)\,\Pi(\mu+\nu)} \{(-1)^n Z_{\nu\mu}^n(x) + (-1)^{\mu+\nu} Z_{\nu\mu}^n(-x)\}$$

$$V_{\nu\mu}^n = \frac{2^{-n}\,\Pi(n+\nu)}{\Pi(n-\mu)\,\Pi(\mu+\nu)} \{(-1)^n Z_{\nu\mu}^n(x) - (-1)^{\mu+\nu} Z_{\nu\mu}^n(-x)\}. \qquad 14)$$

$$Z_{\nu\mu}^n(x) =$$

$$= (1-x)^{n-\frac{\mu+\nu}{2}} (1+x)^{\frac{\mu+\nu}{2}} F\left(-n+\nu, -n+\mu, \nu+\mu+1, \frac{x+1}{x-1}\right). \qquad 15)$$

Dieser Ausdruck von $Z_{\nu\mu}^n$ kann noch durch einen vielfachen Differentialquotienten ersetzt werden, den man erhält, indem man beachtet, dass $Z_{\nu\mu}^n(x)$ ein Zweig der Riemann'schen P-Function:

$$P\begin{pmatrix} -1 & +1 & \infty & \\ \frac{\mu+\nu}{2} & \frac{\mu-\nu}{2} & -n & x \\ -\frac{\mu+\nu}{2} & -\frac{\mu-\nu}{2} & n+1 & \end{pmatrix} =$$

$$= P\begin{pmatrix} \frac{\mu-\nu}{2} & \frac{\mu+\nu}{2} & n+1 & \\ -\frac{\mu-\nu}{2} & -\frac{\mu+\nu}{2} & -n & \frac{1-x}{2} \end{pmatrix}$$

ist, welcher, $\nu > \mu$ vorausgesetzt, mit $(1-x)^{\frac{\mu-\nu}{2}}(1+x)^{\frac{\mu+\nu}{2}}$ multipliciert eine ganze Function vom Grade $n+\mu$ wird. Die Darstellung der zweiten P-Function durch hypergeometrische Reihen[1] gibt dann:

$$Z_{\nu\mu}^n = \text{Const}\,(1-x)^{-\frac{\mu-\nu}{2}}(1+x)^{-\frac{\mu+\nu}{2}} F\left(-n+\nu, n+\nu+1, \nu-\mu+1, \frac{1-x}{2}\right)$$

und hierauf, die Jacobi'sche[2] Formel angewandt, nach Bestimmung der Constanten C:

$$Z_{\nu\mu}^n = \frac{\Pi(\nu+\mu)}{\Pi(n+\mu)}(1-x)^{\frac{\mu-\nu}{2}}(1+x)^{-\frac{\mu+\nu}{2}}\frac{d^{n-\nu}}{dx^{n-\nu}}(1-x)^{n-\mu}(1+x)^{n+\mu} \qquad 15a)$$

$$\nu > \mu$$

Der späteren Anwendung wegen bemerke man ferner noch folgende Formeln, in denen $P_\nu^n(x)$ die früher definierte Bedeutung hat:

---

[1] Riemann, Werke, S. 82.

[2] Crelle, Journal, Bd. 56. Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe.

$$U_{\nu 0}^{n} = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} \frac{\Pi(2n)}{\Pi^{2}(n)} P_{\nu}^{n}(x) \qquad V_{\nu 0}^{n}(x) = 0$$

$$P_{0}^{n} = (-2)^{n} \frac{\Pi^{2}(n)}{\Pi(2n)} P_{n}(x)$$

$$U_{\nu\mu}^{n}(-x) = (-1)^{n+\nu+\mu} U_{\nu\mu}^{n}(x) \qquad V_{\nu\mu}^{n}(-x) = -(-1)^{n+\nu+\mu} V_{\nu\mu}^{n}(x)$$

$$\left.\begin{matrix} U_{\nu\mu}^{n}(1) = 0 \\ V_{\nu\mu}^{n}(1) = 0 \end{matrix}\right\} \text{wenn } \nu \neq \mu \qquad \left.\begin{matrix} = (-1)^{\nu} \\ = (-1)^{\nu} \end{matrix}\right\} \text{wenn } \nu = \mu \neq 0 \qquad \left.\begin{matrix} = 2 \\ = 0 \end{matrix}\right\} \text{wenn } \nu = \mu = 0$$

Obiger Ausdruck von $Z_{\nu\mu}^{n}$ gestattet eine leichte Bildung der $U_{\nu\mu}^{n} V_{\nu\mu}^{n}$. Die Werte der ersten 28 Functionen sind in folgender Tabelle enthalten:

n	μ	$\nu = 0$		$\nu = 1$		$\nu = 2$	
		$U_{\nu\mu}^{n}$	$V_{\nu\mu}^{n}$	$U_{\nu\mu}^{n}$	$V_{\nu\mu}^{n}$	$U_{\nu\mu}^{n}$	$V_{\nu\mu}^{n}$
0	0	2	0	—	—	—	—
1	0	$2x$	0	$-2\sqrt{1-x^2}$	0	—	—
1	1	$-\sqrt{1-x^2}$	0	$-x$	-1	—	—
2	0	$(3x^2-1)$	0	$-3x\sqrt{1-x^2}$	0	$3(1-x^2)$	0
2	1	$-2x\sqrt{1-x^2}$	0	$1-2x^2$	$-x$	$2x\sqrt{1-x^2}$	$2\sqrt{1-x^2}$
2	2	$\frac{1}{2}(1-x^2)$	0	$\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$	$\frac{1}{2}(1+x^2)$	x

Endlich mag zum Schlusse noch folgendes Additionstheorem der $U_{\nu\mu}^{n} V_{\nu\mu}^{n}$ Platz finden, das für das spätere dienlich sein wird und dessen Beweis der Kürze halber unterdrückt werden mag:

II. Bezeichnet man mit *ABC* die Winkel, mit *abc* die Seiten irgendeines sphärischen Dreieckes, mit $\alpha\beta$ aber ganz willkürliche Größen, so gilt folgende Gleichung:

$$U_{\nu\mu}^{n}(\cos C)\cos(\mu a+\alpha)\cos(\nu b+\beta)+$$
$$+V_{\nu\mu}^{n}(\cos C)\sin(\mu a+\alpha)\sin(\nu b+\beta)$$
$$=(-1)^{n+\nu+\mu}\sum_{0}^{n}{}'(-1)^{\rho}\{U_{\nu\rho}^{n}(\cos A)U_{\rho\mu}^{n}(\cos B)\cos\alpha\cos\beta-$$
$$V_{\nu\rho}^{n}(\cos B)V_{\rho\mu}^{n}(\cos B)\sin\alpha\sin\beta\}\cos\rho c \qquad 16)$$
$$-(-1)^{n+\nu+\mu}\sum_{0}^{n}{}'(-1)^{\rho}\{U_{\nu\rho}^{n}(\cos A)V_{\rho\mu}^{n}(\cos B)\sin\alpha\cos\beta+$$
$$+V_{\nu\rho}^{n}(\cos A)U_{\rho\mu}^{n}(\cos B)\cos\alpha\sin\beta\}\sin\rho c.$$

Durch diese beiden Hilfssätze I und II sind die später nöthigen Entwickelungen bereits jetzt geleistet, und es erübrigt zur Erledigung der Vorbereitungen noch die Ausdrücke für die Bewegung eines frei rotierenden Körpers mit drei ungleichen Hauptträgheitsaxen aufzustellen. Dieselben sind unter anderem im 2. Bande von Halphén's Traité des fonctions elliptiques in sehr ausführlicher Weise entwickelt, für die praktische Ausrechnung empfiehlt es sich aber, ein von dem dort gegebenen speciellen System etwas abweichendes anzuwenden.

III.

Es habe der betrachtete Körper die durch seinen Schwerpunkt gehenden Hauptträgheitsaxen ABC, die ihrer Größe nach der Bedingung genügen:

$$A<B<C.$$

Rotiert dieser Körper frei um seinen Schwerpunkt, so wird seine lebendige Kraft h und seine Flächengeschwindigkeit G constant bleiben. Wählt man also ein durch den Schwerpunkt gelegtes und im Raume fixes Coordinatensystem XYZ so, dass die XY-Ebene mit der invariablen Ebene zusammenfällt, und sind die neun Richtungscosinus in der folgenden Weise bezeichnet:

	X	Y	Z
A	a_1	b_1	c_1
B	a_2	b_2	c_2
C	a_3	b_3	c_3

so werden, wenn pqr die momentanen Drehungsgeschwindigkeiten um die Axen ABC sind, die Gleichungen gelten:

$$Ap = G.c_1 \qquad Bq = G.c_2 \qquad Cr = G.c_3. \tag{1}$$

Ferner hat man aber, wenn man ein Rechtssystem zugrunde legt, die Euler'schen Gleichungen:

$$A\frac{dp}{dt} = (B-C)qr \qquad B\frac{dq}{dt} = (C-A)pr$$
$$C\frac{dr}{dt} = (A-B)pq; \tag{2}$$

führt man hier die $c_1c_2c_3$ nach Obigem ein, so wird:

$$\frac{dc_1}{dt} = \left(\frac{G}{C}-\frac{G}{B}\right)c_2c_3 \qquad \frac{dc_2}{dt} = \left(\frac{G}{A}-\frac{G}{C}\right)c_1c_3$$
$$\frac{dc_3}{dt} = \left(\frac{G}{B}-\frac{G}{A}\right)c_1c_2. \tag{3}$$

Um diese Gleichungen zu integrieren, hat man Folgendes zu beachten: Aus dem Princip der Constanz der lebendigen Kraft und des Flächenmomentes folgt:

$$A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2 = G^2$$
$$Ap^2+Bq^2+Cr^2 = 2h. \tag{4}$$

Da nun vorausgesetzt wurde: $A<B<C$, so folgt aus diesen Gleichungen, dass stets sein muss:

$$G^2-2Ah>0 \qquad G^2-2Ch<0.$$

Man hat also noch zu unterscheiden die Fälle $G^2 . 2Bh \gtrless 0$.

Es möge für das Folgende $G^2 - 2Bh > 0$ vorausgesetzt werden, dann ist:

$$\frac{G}{A} > \frac{G}{B} > \frac{2h}{G} > \frac{G}{C}.$$

Wählt man jetzt ω reell ω' rein imaginär mit positivem Factor von i, setzt: $\omega'' = \omega + \omega'$ und bildet:

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{1}{(u - \omega_{\mu\nu})^2} - \frac{1}{\omega_{\mu\nu}^2} \right) \qquad \omega_{\mu\nu} = \mu\omega + \nu\omega',$$

so sind:

$$e_1 = p(\omega) \qquad e_2 = p(\omega'') \qquad e_3 = p(\omega')$$

drei reelle positive Zahlen mit der Eigenschaft $e_1 > e_2 > e_3$.

Setzt man weiterhin:

$$\sigma(u) = u \cdot \prod_{-\infty}^{+\infty}{}' \prod_{-\infty}^{+\infty}{}' \left(1 - \frac{u}{\omega_{\mu\nu}} \right) e^{\frac{u}{\omega_{\mu\nu}} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{\omega_{\mu\nu}}\right)^2}$$

$$\sigma_1(u) = \frac{\sigma(u+\omega)}{\sigma(\omega)} e^{-\frac{\sigma}{\sigma}(\omega) \cdot u} \qquad \sigma_2(u) = \frac{\sigma(u+\omega'')}{\sigma(\omega'')} e^{-\frac{\sigma'}{\sigma}(\omega'') \cdot u}$$

$$\sigma_3(u) = \frac{\sigma(u+\omega')}{\sigma(\omega')} e^{-\frac{\sigma}{\sigma}(\omega') \cdot u},$$

so wird, wenn man s auf das Intervall $0, -\omega' i$ beschränkt, sein:

$$i \frac{\sigma'}{\sigma}(is) > i \frac{\sigma_1'}{\sigma_1}(is) > i \frac{\sigma_2'}{\sigma_2}(is) > i \frac{\sigma_3'}{\sigma_3}(is).$$

Man kann also setzen:

$$\frac{G}{A} = R - i \frac{\sigma_3'}{\sigma_3}(is) \qquad \frac{G}{B} = R - i \frac{\sigma_2'}{\sigma_2}(is)$$

$$\frac{G}{C} = R - i \frac{\sigma'}{\sigma}(is) \qquad \frac{2h}{G} = R - i \frac{\sigma_1'}{\sigma_1}(is). \qquad 5)$$

Wäre $G^2-2Bh<0$, so hätte man hier σ_1 und σ_2 zu vertauschen. Man erhält daher die diesem Falle entsprechenden Formeln, indem man in allen folgenden Gleichungen $\omega+\omega'$ statt ω setzt, wobei gleichzeitig $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ in $\sigma_2\sigma_1\sigma_3$ übergehen.

Aus diesen vier Gleichungen folgt umgekehrt:

$$k^2 = \frac{B-A}{C-A}\,\frac{2hC-G^2}{G^2-2Ah} \qquad k'^2 = \frac{C-A}{C-B}\,\frac{G^2-2Bh}{G^2-2Ah}$$

$$e_1-e_3 = \alpha^2 = \frac{(C-B)(G^2-2Ah)}{ABC}$$

$$\alpha\omega = K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \tag{6}$$

$$\alpha\omega' = Ki' = i\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}$$

$$\alpha s = \int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}} \qquad \xi^2 = \frac{C(G^2-2Ah)}{G^2(C-A)}$$

Für später mögen gleich folgende Größen eingeführt werden:

$$q = e^{-\pi\frac{\omega'}{\omega}} = e^{-\pi\frac{K'}{K}} \qquad \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} = e^{-\frac{\pi s}{2\omega}} = e^{-\frac{\alpha\pi s}{2K}}$$

$$N_1 = \frac{s}{\omega}\,\frac{\sigma'}{\sigma}(\omega)+R \qquad N_2 = \frac{\pi}{2\omega}$$

oder auch:

$$N_1 = \frac{2h}{G}+\alpha^2 s\frac{E}{K}-\alpha k'^2\int_0^\xi \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}} \tag{6a}$$

$$N_2 = \frac{\alpha\pi}{2K}.$$

Man bemerke, dass aus dem vorigen System die Ungleichungen folgen:

$$\sqrt{q}\,\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}<1 \qquad \sqrt{q}\,\operatorname{ctg}\frac{\varepsilon}{2}<1,\ \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}<1,$$

[1] Die angewandten Formeln findet man in: Schwarz, Formelsamml. z. Gebr. d. ellipt. Funct. Berlin, 1893.

wodurch die Convergenz der späteren Reihen gesichert ist. Führt man die eben gewonnenen Ausdrücke von $\frac{G}{A}, \frac{G}{B}, \frac{G}{C}$ in die Gleichungen für $c_1 c_2 c_3$, so kann man ihnen mit Rücksichtnahme auf die bereits fixierten zwei Integrationsconstanten genügen durch 3σ-Quotienten mit gemeinsamen Nenner. Es möge folgendes System gewählt werden:

$$c_1 = \frac{\sigma_3}{\sigma_1}(is)\,\frac{\sigma_1}{\sigma_3}(t) \qquad c_2 = \sqrt{c_1 - c_3}\,\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(is)\,\frac{\sigma}{\sigma_3}(t)$$

$$c_3 = i\sqrt{c_1 - c_3}\,\frac{\sigma}{\sigma_1}(is)\,\frac{\sigma_2}{\sigma_3}(t) \qquad 7)$$

Zur Orientierung mögen gleich angemerkt werden die beiden Fälle:

$$A = B \qquad k = 0$$

$$c_1 = \sin\varepsilon\cos N_2 t \qquad c_2 = \sin\varepsilon\sin N_2 t \qquad c_3 = \cos\varepsilon \qquad 7a)$$

$$2Bh = G^2 \qquad k = 1$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{A(C-B)}{B(C-A)}}\,\frac{2}{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}} \qquad c_2 = \frac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}} \qquad 7b)$$

$$c_3 = \sqrt{\frac{C(B-A)}{B(C-A)}}\,\frac{2}{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}} \qquad \alpha = \frac{G}{B}\sqrt{\frac{(B-A)(C-B)}{A\,C}}.$$

Nach Auffindung der $c_1 c_2 c_3$ können nunmehr die übrigen sechs Richtungscosinusse durch Quadratur gefunden werden.

Man setze zu diesem Zwecke:

$$\alpha = a_1 + ib_1 \qquad \beta = a_2 + ib_2 \qquad \gamma = a_3 + ib_3 \qquad 8)$$

und bezeichne mit $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ die beziehungsweise conjugiert complexen Größen. Es gelten dann die drei kinematischen Gleichungen:

$$\frac{d\alpha}{dt} = r\beta - q\gamma \qquad \frac{d\beta}{dt} = p\gamma - r\alpha \qquad \frac{d\gamma}{dt} = q\alpha - p\beta \qquad 9)$$

und dieselben Gleichungen für $\alpha_0 \beta_0 \gamma_0$. Aus ihnen folgt:

$$\alpha_0 \frac{d\alpha}{dt_0} - \alpha \frac{d\alpha_0}{dt} = r(\alpha_0\beta - \alpha\beta_0) - q(\alpha_0\gamma - \alpha\gamma_0).$$

Es ist aber:

$$\alpha_0\beta - \alpha\beta_0 = 2ic_3 \qquad \alpha\alpha_0 = 1 - c_1^2$$
$$\alpha_0\gamma - \alpha\gamma_0 = -2ic_2,$$

so dass man hat:

$$\frac{d}{dt} \log \frac{\alpha}{\alpha_0} = 2i \frac{qc_2 + rc_3}{1 - c_1^2}$$

und wegen $\alpha\alpha_0 = 1 - c_1^2$ folgt:

$$\frac{d}{dt} \log \alpha = i \frac{qc_2 + rc_3}{1 - c_1^2} + \frac{d}{dt} \log \sqrt{1 - c_1^2}.$$

Es ist nun:

$$\frac{qc_2 + rc_3}{1 - c_1^2} = \frac{1}{1 - c_1^2} \left\{ \frac{2h}{G} - \frac{G}{A} c_1^2 \right\} = \frac{2h}{G} - \left(\frac{G}{A} - \frac{2h}{G} \right) \frac{c_1^2}{1 - c_1^2}$$

Somit ist also:

$$\log \alpha = \frac{2h}{G} it - i \left(\frac{G}{A} - \frac{2h}{G} \right) \int \frac{c_1^2}{1 - c_1^2} dt + \frac{1}{2} \lg (1 - c_1^2)$$

und analog:

$$\log \beta = \frac{2h}{G} it - i \left(\frac{G}{B} - \frac{2h}{G} \right) \int \frac{c_2^2}{1 - c_2^2} dt + \frac{1}{2} \lg (1 - c_2^2)$$
$$\log \gamma = \frac{2h}{G} it - i \left(\frac{G}{C} - \frac{2h}{G} \right) \int \frac{c_3^2}{1 - c_3^2} dt + \frac{1}{2} \lg (1 - c_3^2) \qquad 10)$$

Führt man hier die Werte der $c_1 c_2 c_3$ ein und führt die Integration durch Zerlegung in ζ-Summen in bekannter Weise durch, so wird

$$\alpha = -\sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\sigma(t+is)}{\sigma_1(is)\sigma_3(t)}\,e^{iRt}$$

$$\beta = \frac{\sigma_1(t+is)}{\sigma_1(is)\sigma_3(t)}\,e^{iRt} \qquad 11)$$

$$\gamma = i\,\frac{\sigma_3(t+is)}{\sigma_1(is)\sigma_3(t)}\,e^{iRt}.$$

Dabei wurden die Integrationsconstanten so bestimmt, dass für $t = 0$ die X-Axe in die AB-Ebene fällt.

Bezeichnet man jetzt in üblicher Weise mit $\psi\varphi\vartheta$ die Eulerschen Winkel, welche die Lage des Systems der Hauptaxen gegen das fixe System XYZ bestimmen, so folgt aus den in Π angegebenen Werten der neun Cosinusse, dass man hat

$$\cos\vartheta = c_3 \qquad \varphi = \frac{1}{2i}\log\frac{c_2+ic_1}{c_2-ic_1}$$

$$\psi = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2i}\log\frac{\gamma}{\gamma_0}. \qquad 12)$$

Setzt man die Werte der $c_1c_2c_3$ ein und drückt alles durch σ-Producte aus, so erhält man:

$$\log\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = -\eta' s i +$$

$$+\frac{1}{2}\log\frac{\sigma_2\left(\frac{t+is+\omega'}{2}\right)\sigma_3\left(\frac{t+is+\omega'}{2}\right)\sigma_2\left(\frac{t-is-\omega'}{2}\right)\sigma_3\left(\frac{t-is-\omega'}{2}\right)}{\sigma_2\left(\frac{t-is+\omega'}{2}\right)\sigma_3\left(\frac{t-is+\omega'}{2}\right)\sigma_2\left(\frac{t+is-\omega'}{2}\right)\sigma_3\left(\frac{t+is-\omega'}{2}\right)}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\eta'}{i}t + \qquad 13)$$

$$+\frac{1}{2i}\log\frac{\sigma_2\left(\frac{t-is-\omega'}{2}\right)\sigma_3\left(\frac{t-is-\omega'}{2}\right)\sigma_2\left(\frac{t+is-\omega'}{2}\right)\sigma_3\left(\frac{t+is-\omega'}{2}\right)}{\sigma_2\left(\frac{t+is+\omega'}{2}\right)\sigma_3\left(\frac{t+is+\omega'}{2}\right)\sigma_2\left(\frac{t-is+\omega'}{2}\right)\sigma_3\left(\frac{t-is+\omega'}{2}\right)}$$

$$\psi = Rt + \frac{1}{2i}\log\frac{\sigma_3(t+is)}{\sigma_3(t-is)}.$$

Diese drei Ausdrücke können nun sofort in trigonometrische Reihen entwickelt werden; es ergibt sich:[1]

$$\log \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \log \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} + \\ + 2 \sum \frac{1}{m} \frac{q^{\frac{m}{2}}}{1+q^m} \left(\operatorname{tg}^m \frac{\varepsilon}{2} - \operatorname{ctg}^m \frac{\varepsilon}{2} \right) \cos m N_2 t$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - N_2 t - \\ - 2 \sum \frac{1}{m} \frac{q^{\frac{m}{2}}}{1+q^m} \left(\operatorname{tg}^m \frac{\varepsilon}{2} + \operatorname{ctg}^m \frac{\varepsilon}{2} \right) \sin m N_2 t \qquad 13a)$$

$$\psi = N_1 t - 2 \sum \frac{1}{m} \frac{q^{\frac{m}{2}}}{1-q^m} \left(\operatorname{tg}^m \frac{\varepsilon}{2} - \operatorname{ctg}^m \frac{\varepsilon}{2} \right) \sin m N_2 t$$

wo zu summieren ist über $m = 2, 4, 6, 8, \ldots$

Es werden ferner in der Folge zwei Winkel auftreten ζ und χ, definiert durch die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin \zeta \cos \chi &= \cos \vartheta \cos \varphi \\ \sin \zeta \sin \chi &= \sin \varphi \\ \cos \zeta &= \sin \vartheta \cos \varphi \end{aligned} \qquad 14)$$

Für diese beiden Winkel lassen sich nun genau ebensolche Entwickelungen aufstellen wie für $\varphi\vartheta$. Es ergibt sich zunächst:

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \zeta = \eta t + \\ + \frac{1}{2} \log \frac{\sigma\left(\frac{t+is+\omega}{2}\right) \sigma_3\left(\frac{t+is-\omega}{2}\right) \sigma\left(\frac{t-is-\omega}{2}\right) \sigma_3\left(\frac{t-is-\omega}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{t-is+\omega}{2}\right) \sigma_3\left(\frac{t-is+\omega}{2}\right) \sigma\left(\frac{t+is+\omega}{2}\right) \sigma_3\left(\frac{t+is+\omega}{2}\right)} \qquad 15)$$

$$\Psi = \psi + \chi = \frac{\pi}{2} + Rt + \frac{1}{2i} \log \frac{\sigma_1(t+is)}{\sigma_1(t-is)}.$$

[1] Die hiezu nöthigen Formeln findet man etwa: Halphén, Fonctions elliptiques, tome I, Chap. XIII.

Entwickelt man diese beiden Functionen wieder in Reihen, so folgt:

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}\zeta = \frac{1}{2} \log \frac{2K}{\pi\alpha} \frac{1-\sin\varepsilon \sin N_2 t}{1+\sin\varepsilon \sin N_2 t} +$$

$$+2\sum \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n} \frac{q^n}{1-q^n}\left(\operatorname{tg}^n\frac{\varepsilon}{2}+\operatorname{ctg}^n\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin nN_2 t \qquad 15a)$$

$$\Psi = \frac{\pi}{2} + N_1 t - \operatorname{arctg}(\cos\varepsilon \operatorname{tg} N_2 t) +$$

$$+2\sum \frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{m} \frac{q^m}{1-q^m}\left(\operatorname{tg}^m\frac{\varepsilon}{2}-\operatorname{ctg}^m\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin mN_2 t,$$

wobei zu summieren ist über $n = 1, 3, 5, 7, \ldots$, $m = 2, 4, 6, 8, \ldots$.

Man kann leicht auch $\operatorname{arctg}(\cos\varepsilon \operatorname{tg} N_2 t)$ und

$$\log \frac{1-\sin\varepsilon \sin N_2 t}{1+\sin\varepsilon \sin N_2 t}$$

in eine trigonometrische Reihe entwickeln, wodurch man einen einheitlicheren Ausdruck erhält, aber die Convergenz verlangsamt.

Weiter soll jetzt folgende Curve bestimmt werden: Man sehe $c_1 c_2 c_3$ als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes an, so wird dieser eine auf der Kugel $x^2+y^2+z^2=1$ liegende Curve beschreiben, und diese projiciere man stereographisch auf die XY-Ebene. Es ist dann:

$$X+iY = \frac{c_1+ic_2}{1-c_3}$$

oder: 16)

$$X+iY = \frac{i}{\alpha}\left(\frac{\sigma_3'}{\sigma_3}\left(\frac{t-is-\omega'}{2}\right)-\frac{\sigma_2'}{\sigma_2}\left(\frac{t-is-\omega'}{2}\right)\right),$$

also entwickelt:

$$C^2 . X = \sum \frac{\left(\sqrt{q}\,\operatorname{ctg}\frac{\varepsilon}{2}\right)^n}{1-q^{2n}} \left(1-q^n\,\operatorname{tg}^{2n}\frac{\varepsilon}{2}\right) \cos nN_2 t$$

$$C^2 . Y = \sum \frac{\left(\sqrt{q}\,\operatorname{ctg}\frac{\varepsilon}{2}\right)^n}{1-q^{2n}} \left(1+q^n\,\operatorname{tg}^{2n}\frac{\varepsilon}{2}\right) \sin nN_2 t \quad 16a)$$

$$n = 1, 3, 5, 7 \ldots$$

$$C = q^{\frac{1}{4}} (1+q^2+q^6+q^{12}+\ldots) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{K.k}{\pi} .$$

Eine geschlossene Curve ohne Doppelpunkt, symmetrisch bezüglich des Ursprungs.

In den vorhergehenden Ausdrücken der ψ, φ, ϑ, Ψ, χ erscheinen statt der mechanischen Constanten A, B, C, $2h$, G die Elemente q, N_1, N_2, ε. Es erübrigt also noch, jene rückwärts durch diese auszudrücken. Die früher gegebenen Ausdrücke liefern sofort:

$$\sqrt{k} = 2q^{\frac{1}{4}} \frac{1+q^2+q^6+q^{12}+\ldots}{1+2q+2q^4+2q^9+\ldots}$$

$$\xi = \sin \operatorname{am}\left(\frac{2K}{\pi} \operatorname{lgctg}\frac{\varepsilon}{2}, k'\right)$$

$$\frac{2h}{G} = N_1 + N_2 \frac{4KE}{\pi^2} \log \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} + \\ + N_2 \frac{2Kk'^2}{\pi} \int_0^{\xi} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}} \quad 17)$$

$$\frac{G}{A} = \frac{2h}{G} + N_2 \frac{2K\xi}{\pi} \sqrt{\frac{1-k'^2\xi^2}{1-\xi^2}}$$

$$\frac{G}{B} = \frac{2h}{G} + N_2 \frac{2Kk'^2\xi}{\pi} \sqrt{\frac{1-\xi^2}{1-k'^2\xi^2}}$$

$$\frac{G}{C} = \frac{2h}{G} - N_2 \frac{2K}{\pi\xi} \sqrt{(1-\xi^2)(1-k'^2\xi^2)}$$

In Reihen entwickelt, geben diese Ausdrücke:

$$\frac{2h}{G} = N_1 - N_2 \cos\varepsilon - 2N_2 \sum \frac{(-1)^{\frac{m}{2}} q^m}{1-q^m} \left(\operatorname{tg}^m \frac{\varepsilon}{2} - \operatorname{ctg}^m \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$\frac{G}{A} = N_1 \qquad -2N_2 \sum \frac{q^{\frac{m}{2}}}{1-q^m} \left(\operatorname{tg}^m \frac{\varepsilon}{2} - \operatorname{ctg}^m \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

18)

$$\frac{G}{B} = N_1 \qquad -2N_2 \sum \frac{(-q)^{\frac{m}{2}}}{1-q^m} \left(\operatorname{tg}^m \frac{\varepsilon}{2} - \operatorname{ctg}^m \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$\frac{G}{C} = N_1 - \frac{N_2}{\cos\varepsilon} - 2N_2 \sum \frac{q^m}{1-q^m} \left(\operatorname{tg}^m \frac{\varepsilon}{2} - \operatorname{ctg}^m \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$m = 2, 4, 6, \ldots$$

Oder:

$$\frac{2h}{G} = N_1 - N_2 \frac{\alpha s}{K'} \qquad -N_2 \frac{4K}{K'} \sum \frac{q_1^{\frac{m}{2}}}{1-q_1^m} \sin m \frac{\pi \alpha s}{2K'}$$

$$\frac{G}{A} = N_1 - N_2 \frac{\alpha s}{K'} + N_2 \frac{K}{K'} \operatorname{tg} \frac{\pi \alpha s}{2K'} -$$

$$- N_2 \frac{4K}{K'} \sum \frac{(-1)^{\frac{m}{2}} q_1^m}{1-q_1^m} \sin m \frac{\pi \alpha s}{2K'}$$

18 *a*)

$$\frac{G}{B} = N_1 - N_2 \frac{\alpha s}{K'} \qquad -N_2 \frac{4K}{K'} \sum \frac{(-q_1)^{\frac{m}{2}}}{1-q_1^m} \sin m \frac{\pi \alpha s}{2K'}$$

$$\frac{G}{C} = N_1 - N_2 \frac{\alpha s}{K'} - N_2 \frac{K}{K'} \operatorname{ctg} \frac{\pi \alpha s}{2K'} -$$

$$- N_2 \frac{4K}{K'} \sum \frac{q_1^m}{1-q_1^m} \sin m \frac{\pi \alpha s}{2K'}$$

Hier ist: $\lg \frac{1}{q} \lg \frac{1}{q_1} = \pi^2$, $\frac{K}{K'} = \frac{1}{\pi} \log \frac{1}{q_1}$, so dass man $N_1 N_2 q_1 \frac{\pi \alpha s}{2K'}$ als die gegebenen Elemente ansehen kann. Da stets $q < 1$ sein muss, so wird immer q oder q_1 kleiner als

$$e^{-\pi} = 0{\cdot}04321.$$

IV.

Die bisher gewonnenen Resultate mögen zunächst angewandt werden auf den bereits von Gyldén[1] behandelten Fall eines selbstleuchtenden rotierenden Körpers.

Es kann zunächst bemerkt werden, dass das vorhin gebrauchte Coordinatensystem, dessen XY-Ebene die invariable Ebene war, um irgendeinen Winkel ω in negativem Sinne gedreht werden kann um die Z-Axe, wenn man gleichzeitig den Winkel ω zu dem Ausdrucke von ψ hinzufügt. Dieser Winkel ω soll nun so gewählt werden, dass die X-Axe in die Knotenlinie der invariablen Ebene und des Erdäquators zu liegen kommt. Es sei dann Ω, i die Knotenlänge und Neigung der invariablen Ebene des Sternes, bezogen auf den Erdäquator und die Frühlingsnachtgleichenlinie. Ferner sei α, δ Rectascension und Declination des Sternes und endlich p, l Poldistanz und Länge der Erde, bezogen auf das System der Axen XYZ.

Dann hat man auf der von außen her betrachteten Himmelskugel der Erde folgendes, von den Punkten: Stern, Pol des Äquators, Pol der invariablen Ebene gebildetes Dreieck:

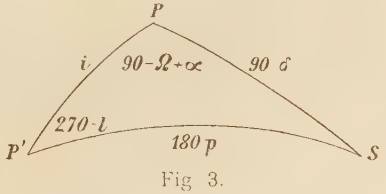

Fig. 3.

und hienach:

$$\begin{aligned} -\cos p &= \cos i \sin \delta + \sin i \cos \delta \sin (\alpha - \Omega) \\ -\sin p \sin l &= \sin i \sin \delta + \cos i \cos \delta \sin (\alpha - \Omega) \\ -\sin p \cos l &= \cos \delta \cos (\alpha - \Omega) \end{aligned} \qquad 1)$$

[1] H. Gyldén, Math. Theorie d. veränderl. Sterne. Stockholm, 1881.

$$\begin{aligned} -\sin\delta &= \cos i\cos p+\sin i\sin p\sin l \\ -\cos\delta\sin(\alpha-\Omega) &= -\sin i\cos p+\cos i\sin p\sin l \\ -\cos\delta\cos(\alpha-\Omega) &= \sin p\cos l \end{aligned} \tag{2}$$

Die so bestimmten Größen p und l sind Constanten, die bloß abhängen von dem Orte des Sternes und der Lage seiner invariablen Ebene.

Es sei nun die Oberfläche des Sternes wieder durchaus convex, und es mögen k^2 und Γ die Krümmung, beziehungsweise Leuchtkraft eines Elementes derselben bezeichnen. Verfährt man nun ebenso wie in I bei einer beleuchteten Fläche, so erkennt man augenblicklich, dass man die Oberfläche als Kugel annehmen darf, deren Leuchtkraft in den einzelnen Punkten aber $\frac{\Gamma}{k^2}$ ist. Es seien nun l, p Länge und Poldistanz eines Punktes der Kugel bezüglich der Hauptaxen und:

$$\frac{\Gamma}{k^2}=\sum_n\sum_\nu (a_\nu^n\cos\nu l+b_\nu^n\sin\nu l)P_\nu^n(\cos p) \tag{3}$$

und für das Folgende werde gesetzt:

$$a_\nu^n=c_\nu^n\cos\left(\eta_\nu^n-\nu\frac{\pi}{2}\right)\qquad b_\nu^n=c_\nu^n\sin\left(\eta_\nu^n-\nu\frac{\pi}{2}\right)\qquad \eta_{i0}^n=0. \tag{3a}$$

Die Helligkeit eines Sternes beim Ausstrahlungsgesetze: $f(\cos\varepsilon)$ ist dann:

$$H=\int\frac{\Gamma}{k^2}f(\cos\varepsilon)\,d\omega, \tag{4}$$

integriert über die der Erde zugewandte Halbkugel.

Führt man nun ein Coordinatensystem ein, dessen Z-Axe gegen die Erde hin zeigt, und beziehen sich $l\,p$ auf dieses, so wird:

$$\frac{\Gamma}{k^2}=\sum_n{\sum_\nu}'(A_\nu^n\cos\nu l+B_\nu^n\sin\nu l)P_\nu^n(\cos p) \tag{5}$$

$$H=\int_0^{2\pi}dl\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\Gamma}{k^2}f(\cos p)\sin p\,dp.$$

Bei der Integration nach l' bleiben bloß die Glieder mit A_0^n stehen. Das A_0^n ergibt sich aber aus den Formeln von I, wenn $p'l'$ Poldistanz und Länge der Erde bezüglich der Hauptaxen sind, zu:

$$A_0^n = \sum_0^n{}_\nu (a_\nu^n \cos \nu l' + b_\nu^n \sin \nu l') U_{\nu 0}^n (\cos p'). \qquad 6)$$

Mit Rücksicht auf den angegebenen Wert von $U_{\nu 0}^n$ wird also:

$$H = \sum_n k_n \sum_\nu (a_\nu^n \cos \nu l' + b_\nu^n \sin \nu l') P_\nu^n (\cos p')$$

$$k_n = 2\pi \int_0^1 P_n(x) f(x)\, dx. \qquad 7)$$ [1]

Es erübrigt jetzt noch, die $p'l'$ zu ersetzen durch die eingangs definierten Constanten pl. Hiezu bemerke man, dass der anfangs gemachten Bemerkung zufolge die Lage von ABC gegen XYZ definiert ist durch die Euler'schen Winkel $\psi+\omega$, φ, ϑ, also umgekehrt die Lage von XYZ gegen ABC durch $-\varphi$, $-(\psi+\omega)$, $-\vartheta$. Daher hat man in den früher aufgestellten Ausdrücken der $\overline{a_\mu^n}$, $\overline{b_\mu^n}$ zu ersetzen ψ, φ, ϑ durch: $-\varphi-\frac{\pi}{2}$, $-\psi-\omega-\frac{\pi}{2}$, $-\vartheta$ und erhält hiedurch, wenn:

$$\gamma = \omega + l + \frac{\pi}{2}$$

gesetzt wird:

$$H = \sum_n \sum_\mu{}' k_n (\overline{a_\mu^n} \cos \mu(\psi+\gamma) - \overline{b_\mu^n} \sin \mu(\psi+\gamma)) P_\mu^n (\cos p) \qquad 8)$$

$$\overline{a_\mu^n} = (-1)^{\mu+\nu} \sum_0^n{}_\nu{}' c_\nu^n \cos(\nu\varphi + \eta_\nu^n) U_{\nu\mu}^n (\cos\vartheta)$$

$$\overline{b_\mu^n} = (-1)^{\mu+\nu} \sum_0^n{}_\nu c_\nu^n \sin(\nu\varphi + \eta_\nu^n) V_{\nu\mu}^n (\sin\vartheta), \qquad 8a)$$

[1] Vergl. Bruns H., Bemerkungen über den Lichtwechsel der Sterne vom Algoltypus.

und dies kann man schließlich schreiben:

$$H = \sum_{0}^{\infty}{}'(C_\mu \cos \mu(\psi+\gamma)+S_\mu \sin \mu(\psi+\gamma)) \qquad 9)$$

$$(-1)^\mu C_\mu = \sum_{\mu}^{\infty} k_n P_\mu^n(\cos p) \sum_{0}^{n}{}' (-1)^\nu c_\nu^n \cos(\nu\varphi+\eta_\nu^n) U_{\nu\mu}^n(\cos\vartheta)$$

$$(-1)^\mu S_\mu = \sum_{\mu}^{\infty} k_n P_\mu^n(\cos p) \sum_{0}^{n}{}' (-1)^{\nu+1} c_\nu^n \sin(\nu\varphi+\eta_\nu^n) V_{\nu\mu}^n(\cos\vartheta) \qquad 9a)$$

Da nun N_1 groß gegen N_2 ist, so kann man H ansehen als eine periodische Function der Periode $T_1 = \frac{2\pi}{N_1}$, deren Coefficienten aber langperiodischen Veränderungen der Periode $T_2 = \frac{2\pi}{N_2}$ unterworfen sind.

Daher kann hier der Fall eintreten, dass die Lichtcurve zu verschiedenen Zeiten ganz verschiedene Gestalten annehmen kann.

Insbesondere wird daher der größte Wert der Lichtschwankung während der Periode T_1 selbst veränderlich sein und zu gewissen Zeiten gleich Null werden können.

Hievon kann man sich in jedem speciellen Falle etwa dadurch Rechenschaft geben, dass man sich die Function:

$$F(\vartheta,\varphi) = C_1^2+S_1^2+C_2^2+S_2^2+\ldots+C_n^2+S_n^2$$

auf eine Ebene dadurch ausgebreitet denkt, dass man setzt:

$$x = \operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}\sin\varphi \qquad y = \operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}\cos\varphi$$

und jetzt die in III dargestellte Curve: $X+iY = \frac{c_1+ic_2}{1-c_3}$ sich gezeichnet denkt. Man kann es so einrichten, dass $F(\vartheta,\varphi)$ wirklich an gewissen Punkten Nullstellen besitzt, durch welche die Curve hindurchläuft. Da der Lichtwechsel für die Beobachtung wegfällt, wenn $F(\vartheta,\varphi)$ unter einer gewissen Grenze bleibt, so

wird für ein gewisses, obige Nullstelle umgebendes Stück der Curve, also für ein bestimmtes, möglicherweise recht kleines Zeitintervall $H = \text{Const}$ sein.

Beschränkt man sich auf die Werte $n = 0, 1, 2$, so wird:

$$H = \frac{1}{2} C_0 + C_1 \cos(\psi+\gamma) + C_2 \cos 2(\psi+\gamma) + S_1 \sin(\psi+\gamma) + S_2 \sin 2(\psi+\gamma) \quad \gamma = \omega + l + \frac{\pi}{2} \tag{10}$$

$$C_0 = 2\pi a_0^0 - \frac{2\pi}{3} \cos p [a_0^1 \cos\vartheta + c_1^1 \sin\vartheta \cos(\varphi+\eta_{11}^1)] + \frac{3\pi}{4}\left(\cos^2 p - \frac{1}{3}\right)\left[a_0^2\left(\cos^2\vartheta - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} c_1^2 \sin 2\vartheta \cos(\varphi+\eta_{11}^2) + c_2^2 \sin^2\vartheta \cos(2\varphi+\eta_{12}^2)\right]$$

$$C_1 = \frac{\pi}{3} \sin p [a_0^1 \sin\vartheta - c_1^1 \cos\vartheta \cos(\varphi+\eta_{11}^1)] - \frac{\pi}{8} \sin 2p [a_0^2 \sin 2\vartheta - c_1^2 \cos 2\vartheta \cos(\varphi+\eta_{11}^2) - c_1^2 \sin 2\vartheta \cos(2\varphi+\eta_{12}^2)] \tag{10a}$$

$$C_2 = \frac{\pi}{8} \sin^2 p \left[a_0^2 \sin^2\vartheta - \frac{1}{2} c_1^2 \sin 2\vartheta \cos(\varphi+\eta_{11}^2) + c_2^2 \frac{1+\cos^2\vartheta}{2} \cos(2\varphi+\eta_{12}^2)\right]$$

$$S_1 = \frac{\pi}{3} c_1^1 \sin p \sin(\varphi+\eta_{11}^1) - \frac{\pi}{8} \sin 2p [c_1^2 \cos\vartheta \sin(\varphi+\eta_{11}^2) + 2 c_2^2 \sin\vartheta \sin(2\varphi+\eta_{12}^2)]$$

$$S_2 = \frac{\pi}{8} \sin^2 p [c_1^2 \sin\vartheta \sin(\varphi+\eta_{11}^2) - 2 c_2^2 \cos\vartheta \sin(2\varphi+\eta_{12}^2)]$$

Im Falle zweier gleicher Hauptaxen $A = B$ ist:

$$\vartheta = \varepsilon = \text{const} \qquad \psi = N_1 t \qquad \varphi = -N_2 t$$

V.

In derselben Weise soll nun die Beleuchtung eines frei rotierenden Planeten behandelt werden. Hiezu lege man zunächst durch den Mittelpunkt des Planeten ein Coordinatensystem A parallel dem Äquatorealsystem der Erde. Ein zweites System J lege man derart, dass seine XY-Ebene die invariable Ebene des Planeten ist und seine X-Axe in den Erdäquator fällt. Die Lage der drei Hauptaxen des Körpers gegen dieses System J ist dann dem eingangs von IV Gesagten zufolge bestimmt durch die drei Euler'schen Winkel $\psi+\omega$, φ, ϑ, wo ψ, φ, ϑ durch III, 3*a*) gegeben sind. Nun markiere man auf der scheinbaren Himmelskugel des Planeten erstens jenen Punkt H, der genau in der Mitte zwischen den scheinbaren Örtern von Sonne und Erde steht, und zweitens jenen Punkt N, der von diesen beiden Örtern um je 90° absteht und den ein Beobachter im Zenith hat, wenn er die Sonne und Erde im Horizont zur Rechten, beziehungsweise Linken hat. Die Richtungen Planet—H und Planet—N nehme man jetzt als X-, beziehungsweise Z-Axe eines dritten Coordinatensystemes H.

Hierauf mögen folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

α_1, δ_1 geocentrische Rectascension und Declination der Sonne;

α_2, δ_2 geocentrische Rectascension und Declination des Planeten;

α, δ planetocentrische Rectascension und Declination des Punktes H;

a, d planetocentrische Rectascension und Declination des Punktes N;

i, Ω Neigung und Knotenlänge der invariablen Ebene gegen den Erdäquator;

$\Omega_1, \frac{\pi}{2} - \omega_1, i_1$ die drei Euler'schen Winkel, welche die Lage des Systemes H gegen das System J bestimmen. (Es sind also $\omega_1 i_1$ Länge und Poldistanz des Poles P der invariablen Ebene im System H.) (Vergl. Fig. 1 und 2.)

r die Entfernung Sonne—Erde;
r' die Entfernung Sonne—Planet;
Δ die Entfernung Erde—Planet;
A der Winkel am Planeten im Dreieck Planet—Sonne—Erde.

Entnimmt man jetzt dem Jahrbuche die Größen $\alpha_1, \alpha_2, \delta_1, \delta_2, r$ $r_1 \Delta$, so hat man zur Bestimmung von A, α, δ, a, d folgendes System:

$$2 \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(r+r_1-\Delta)(r-r_1+\Delta)}{\Delta_1 r_1}} \qquad 1)$$

$$2 \cos \frac{A}{2} \cos\delta \cos\alpha = \frac{r}{r_1} \cos\delta_1 \cos\alpha_1 - \left(1+\frac{\Delta}{r_1}\right) \cos\delta_2 \cos\alpha_2$$

$$2 \cos \frac{A}{2} \cos\delta \sin\alpha = \frac{r}{r_1} \cos\delta_1 \sin\alpha_1 - \left(1+\frac{\Delta}{r_1}\right) \cos\delta_2 \sin\alpha_2 \qquad 2)$$

$$2 \cos \frac{A}{2} \sin\delta = \frac{r}{r_1} \sin\delta_1 - \left(1+\frac{\Delta}{r_1}\right) \sin\delta_2$$

$$\sin A \cos d \cos a = \frac{r}{r_1} (\sin\delta_1 \cos\delta_2 \sin\alpha_2 - \cos\delta_1 \sin\delta_2 \sin\alpha_1)$$

$$\sin A \cos d \sin a = \frac{r}{r_1} (-\sin\delta_1 \cos\delta_2 \cos\alpha_2 + \cos\delta_1 \sin\delta_2 \cos\alpha_1) \qquad 3)$$

$$\sin A \sin d = \frac{r}{r_1} \cos\delta_1 \cos\delta_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)$$

Die folgenden drei Größen $\Omega_1 \omega_1 i_1$ hängen jetzt von den beiden Unbekannten Ωi ab. Man hat für sie:

$$\sin i_1 \cos\omega_1 = \cos i \sin\delta - \sin i \cos\delta \sin(\alpha-\Omega)$$

$$\sin i_1 \sin\omega_1 = \cos i \cos\delta \cos d \sin(\alpha-a) - \sin i (\sin d \cos\delta \cos(\alpha-\Omega) - \cos d \sin\delta \cos(a-\Omega)) \qquad 4)$$

$$\cos i_1 = \cos i \sin d - \sin i \cos d \sin(a-\Omega)$$

$$\sin i_1 \cos\Omega_1 = -\sin i \sin d - \cos i \cos d \sin(a-\Omega)$$

$$\sin i_1 \sin\Omega_1 = +\cos d \cos(a-\Omega)$$

Die Bedeutung der Größen $i_1 \omega_1 \Omega_1$ mag endlich noch durch zwei Figuren veranschaulicht werden:

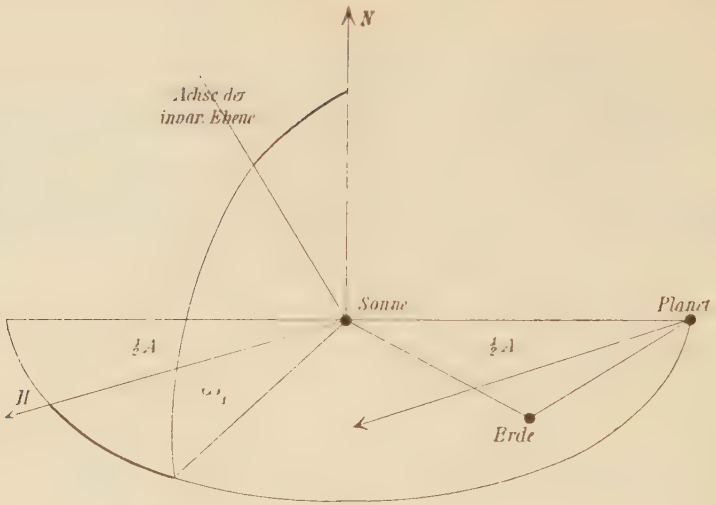

Fig. 4.

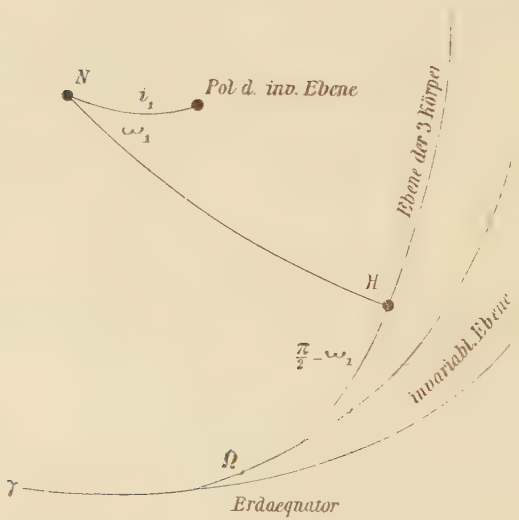

Fig. 5.

Um jetzt die Helligkeit des Planeten zu finden, werde mit Rücksicht auf das in I gewonnene Resultat gesetzt:

$$\frac{1}{k^2}\,\Gamma = \sum_n \sum_\nu c_\nu^n \cos(\nu l - \gamma_\nu^n)\, P_\nu^n(\cos p) \qquad \gamma_0^n = 0 \qquad 5)$$

und für später:

$$\gamma_\nu^n + \nu \frac{\pi}{2} = \eta_\nu^n.$$

Hiebei beziehen sich pl auf die Hauptaxen des Planeten; ferner sei das Beleuchtungsgesetz:

$$f(\cos i, \cos \varepsilon) d\omega,$$

so dass die Helligkeit:

$$H = \int \frac{1}{k^2} \Gamma f(\cos i, \cos \varepsilon) d\omega. \qquad 6)$$

Man beschränke sich nun der Kürze halber auf das Glied:

$$\frac{1}{k^2} \Gamma = \sum_0^n{}' c_\nu^n \cos(\nu l - \gamma_\nu^n) P_\nu^n(\cos p).$$

Transformiert man, um die Integration auszuführen, diesen Ausdruck auf das Coordinatensystem H, so wird er, wenn sich pl jetzt auf dieses beziehen, übergehen in:

$$\sum_\mu^{0\,n}{}' (A_\mu^n \cos \mu l + B_\mu^n \sin \mu l) P_\mu^n(\cos p).$$

In dem System H wird aber sein:

$$\cos i = \sin p \cos\left(l - \frac{A}{2}\right) \qquad \cos \varepsilon = \sin p \cos\left(l + \frac{A}{2}\right) \qquad 7)$$

$$d\omega = \sin p \, dp \, dl,$$

und die Integration hat zu gehen bezüglich p von 0 bis π, bezüglich l von $-\frac{\pi - A}{2}$ bis $+\frac{\pi - A}{2}$. Setzt man also:

$$H_\mu^n = \int_0^\pi dp \int_{-\frac{\pi-A}{2}}^{\frac{\pi-A}{2}} dl \, P_\mu^n(\cos p) \sin p \, f(\cos i, \cos \varepsilon) \cos \mu l$$

$$K_\mu^n = \int_0^\pi dp \int_{-\frac{\pi-A}{2}}^{\frac{\pi-A}{2}} dl \, P_\mu^n(\cos p) \sin p \, f(\cos i, \cos \varepsilon) \sin \mu l, \qquad 8)$$

so hat man sofort für H:

$$H = \sum_{\mu}{}' (A_\mu^n H_\mu^n + B_\mu^n K_\mu^n). \qquad 9)$$

Um jetzt die $A_\mu^n B_\mu^n$ zu finden, bestimme man dem ersten Hilfssatze von II gemäß die Lage des Systemes H gegen die

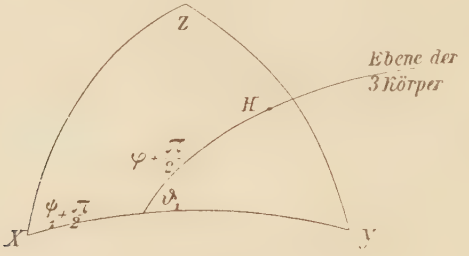

Fig. 6.

Axen ABC durch die drei Winkel $\varphi_1 \psi_1 \vartheta_1$ (vergl. die Figur), so ergibt der erste Hilfssatz von π die fertigen Ausdrücke der $A_\mu^n B_\mu^n$ in der Gestalt:

$$A_\mu^n = \sum_0^n{}_\nu c_\nu^n X_{\nu\mu}^n \qquad B_\mu^n = \sum_0^n{}_\nu c_\nu^n Y_{\nu\mu}^n$$

$$\begin{aligned} X_{\nu\mu}^n &= U_{\nu\mu}^n(\vartheta_1)\cos(\nu\psi_1 - \gamma_\nu^n)\cos\mu\varphi_1 - \\ &\qquad - V_{\nu\mu}^n(\vartheta_1)\sin(\nu\psi_1 - \gamma_\nu^n)\sin\mu\varphi_1 \\ Y_{\nu\mu}^n &= U_{\nu\mu}^n(\vartheta_1)\cos(\nu\psi_1 - \gamma_\nu^n)\sin\mu\varphi_1 + \\ &\qquad + V_{\mu\nu}^n(\vartheta_1)\sin(\nu\psi_1 - \gamma_\nu^n)\cos\mu\varphi_1 \end{aligned} \qquad 10)$$

Somit:

$$H^n = \sum_0^n{}_\nu \sum_0^n{}_\mu{}' c_\nu^n (H_\mu^n X_{\nu\mu}^n - K_\mu^n Y_{\nu\mu}^n). \qquad 11)$$

In diesem Ausdrucke sollen nun statt der $\psi_1 \varphi_1 \vartheta_1$ eingeführt werden die im früheren bestimmten Winkel $\psi, \varphi, \vartheta, i_1, \omega_1, \Omega_1$. Dies ist sofort geschehen mit Hilfe des in II angeführten Additionstheoremes der $U_{\nu\mu}^n V_{\nu\mu}^n$. Es erscheinen nämlich die genannten neun Winkel zusammen in folgendem sphärischen Dreieck,

dessen Kanten die Knotenlinien der XY-Ebenen der drei Systeme HJ und ABC sind:

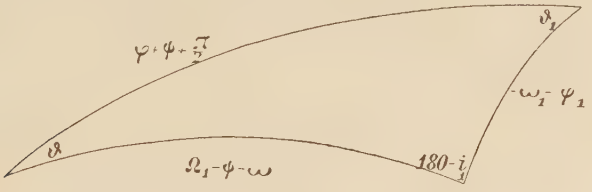

Fig. 7.

Setzt man also dementsprechend in der genannten Gleichung von II:

$$A = \vartheta \qquad a = -\omega_1 - \varphi_1$$
$$B = 180 - i_1 \qquad b = \varphi + \psi_1 + \frac{\pi}{2}$$
$$C = \vartheta_1 \qquad c = \Omega_1 - \psi$$

und das einemal:

$$\alpha = \mu\omega_1 \qquad \beta = -\nu\varphi - \eta_{\nu'}^{n},$$

das anderemal:

$$\alpha = \mu\omega_1 + \frac{\pi}{2} \qquad \beta = -\nu\varphi - \eta_{\nu'}^{n},$$

so erhält man dadurch sofort:

$$(-1)^{\nu} X_{\nu\mu}^{n} = \sum_{0}^{n}{}'_{\rho} (\Theta_1 J_1 \cos\mu\cos\nu + \Theta_2 J_2 \sin\mu\sin\nu)\cos\rho(\psi+\gamma)$$
$$- (\Theta_1 J_2 \sin\mu\cos\nu + \Theta_2 J_1 \cos\mu\sin\nu)\sin\rho(\psi+\gamma) \qquad 12)$$

$$(-1)^{\nu+1} Y_{\nu\mu}^{n} = \sum_{0}^{n}{}'_{\rho} (\Theta_1 J_1 \sin\mu\cos\nu + \Theta_2 J_2 \cos\mu\sin\nu)\cos\rho(\psi+\gamma)$$
$$(\Theta_1 J_2 \cos\mu\cos\nu - \Theta_2 J_1 \sin\mu\sin\nu)\sin\rho(\psi+\gamma),$$

worin der Kürze halber gesetzt ist:

$$U_{\nu\mu}^{n}(\cos\vartheta) = \Theta_1 \qquad U_{\rho\mu}^{n}(\cos i_1) = J_1 \qquad \mu \cdot \omega_1 = \mu$$
$$V_{\nu\mu}^{n}(\cos\vartheta) = \Theta_2 \qquad V_{\rho\mu}^{n}(\cos i_1) = J_2 \qquad \nu\varphi + \eta_{\nu'}^{n} = \nu \qquad 12a)$$
$$\gamma = \omega - \Omega_1.$$

Nun war aber:

$$H^n = \sum_0^n \sum_0^{n\prime} c_\nu^n (H_\mu^n X_{\nu\mu}^n - K_\mu^n Y_{\nu\mu}^n),$$

so dass man schreiben kann:

$$H^n = \sum_0^{n\prime} (C_\rho \cos\rho(\psi+\gamma) + S_\rho \sin\rho(\psi+\gamma)), \tag{13}$$

und darin ist nach dem Obigen:

$$\begin{aligned} C_\rho = &\sum_0^{n\prime} \sum_0^n [(-1)^\nu c_\nu^n \Theta_1 \cos\nu][J_1(\quad H_\mu^n \cos\mu + K_\mu^n \sin\mu)] \\ &+ \sum_0^{n\prime} \sum_0^n [(-1)^\nu c_\nu^n \Theta_2 \sin\nu][J_2(-H_\mu^n \sin\mu + K_\mu^n \cos\mu)] \end{aligned} \tag{13a}$$

$$\begin{aligned} S_\rho = &\sum_0^{n\prime} \sum_0^n [(-1)^\nu c_\nu^n \Theta_1 \cos\nu][J_2(-H_\mu^n \sin\mu + K_\mu^n \cos\mu)] \\ &- \sum_0^{n\prime} \sum_0^n [(-1)^\nu c_\nu^n \Theta_2 \sin\nu][J_1(\quad H_\mu^n \cos\mu + K_\mu^n \sin\mu)]. \end{aligned}$$

Hier hängen aber die [] immer bloß vom Index μ oder ν allein ab. Mit Rücksicht hierauf kann man also folgendes Resultat aussprechen:

Ist die Oberfläche des Planeten durchaus convex nach außen hin, bezeichnet man ferner mit Γ und k^2 die Reflexionsfähigkeit, beziehungsweise Krümmung des Punktes, in dem die Flächennormale die Richtungscosinusse:

$$\sin p \cos l \qquad \sin p \sin l \qquad \cos p$$

hat, und ist:

$$\frac{\Gamma}{k^2} = \sum_0^n c_\nu \cos\left(\nu l - \eta_\nu^n + \nu\frac{\pi}{2}\right)(P_\nu^n \cos p) \qquad \eta_{10}^n = 0, \tag{14}$$

so wird die Helligkeit des Planeten:

$$H = \sum_0^n{}' (C_\rho^n \cos \rho(\psi+\gamma) + S_\rho^n \sin \rho(\psi+\gamma)) \qquad \gamma = \omega - \Omega_1, \qquad 15)$$

wobei:

$$\begin{aligned} C_\rho^n &= P_\rho^n p_\rho^n + Q_\rho^n q_\rho^n \\ S_\rho^n &= P_\rho^n q_\rho^n - Q_\rho^n p_\rho^n \end{aligned} \qquad 15a)$$

und:

$$P_\rho^n = \sum_0^n (-1)^\nu c_\nu^n U_{\nu\rho}^n(\cos\vartheta) \cos(\nu\varphi + \gamma_\nu^n) \qquad 15b)$$

$$Q_\rho^n = \sum_0^n (-1)^\nu c_\nu^n V_{\nu\rho}^n(\cos\vartheta) \sin(\nu\varphi + \gamma_\nu^n)$$

$$p_\rho^n = \sum_0^n{}' (H_\mu^n \cos \mu\omega_1 + K_\mu^n \sin \mu\omega_1) U_{\rho\mu}^n(\cos i_1) \qquad 15c)$$

$$q_\rho^n = -\sum_0^n{}' (H_\mu^n \sin \mu\omega_1 - K_\mu^n \cos \mu\omega_1) V_{\rho\mu}^n(\cos i_1),$$

wo $H_\mu^n K_\mu^n$ durch das angenommene Beleuchtungsgesetz bestimmte Functionen des Phasenwinkels A sind und die im vorigen angegeben wurden.

$P_\rho^n Q_\rho^n$ hängen bloß von der Bewegung des Körpers gegen die invariable Ebene ab, es sind nämlich $\varphi\psi\vartheta$ die durch III, 3 gegebenen Ausdrücke.

$p_\rho^n q_\rho^n$ aber hängen bloß ab von der Stellung von Sonne, Erde, Planet gegen die invariable Ebene, es können nämlich (die Lage der invariablen Ebene als bekannt vorausgesetzt) die drei Winkel $i_1 \omega_1 \Omega_1$ gemäß den am Anfange dieses Abschnittes abgeleiteten Formeln aus den Ephemeriden der Sonne und des Planeten berechnet werden.

Sind zwei Hauptaxen einander gleich: $A = B$, so wird:

$$\psi = N_1 t \qquad \varphi = -N_2 t \qquad \vartheta = \text{const},$$

wobei N_1 groß gegen N_2 ist; nämlich in diesem Falle:

$$N_1 = \frac{1}{A} G \qquad N_2 = \frac{1}{A}\sqrt{\frac{C-A}{C}(G^2-2Ah)}$$

$$\cos\varepsilon = \sqrt{\frac{C(G^2-2Ah)}{G^2(C-A)}}.$$

Ist aber $A \neq B$, so treten zu diesen Werten die in III bestimmten Glieder der Periode $T_2 = \frac{2\pi}{N_2}$ hinzu. Es ist also ψ ein rasch veränderlicher Winkel, der in der Zeit $T_1 = \frac{2\pi}{N_1}$ einen Umlauf vollendet, während $\varphi\vartheta$ langsam veränderlich sind. Es schwingt nämlich ϑ mit der Periode $T_2 = \frac{2\pi}{N_2}$ zwischen festen Grenzen hin und her, während φ in dieser Zeit um 2π wächst.

Es ist daher H eine kurzperiodische Function der Periode T_1, deren Coefficienten sich langsam ändern, indem die Theile $P_\rho^n Q_\rho^n$ die Periode T_2 haben, während die $p_\rho^n q_\rho^n$ Veränderungen unterworfen sind, die von Örtern der Sonne und des Planeten abhängen. Die Größe der kurzperiodischen Helligkeitsschwankungen kann beurtheilt werden aus folgender Gleichung, in der der obere Index n weggelassen ist, also ^{2} den Potenzexponenten bedeutet:

$$M(H^2) - M^2(H) = \frac{1}{4}\sum_1^n{}_\rho (P_\rho^2 + Q_\rho^2)(p_\rho^2 + q_\rho^2), \qquad 16)$$

wenn $M(H), M(H^2)$ der Mittelwert von H, beziehungsweise H^2 während der Zeit T_1 ist.

Sind alle drei Hauptaxen gleich, so rotiert der Körper um eine fixe Axe und die invariable Ebene ist alsdann der Äquator des Planeten. Man hat in diesem Falle $\vartheta = 0$, und nach den in II gegebenen Werten von $U_{\nu\mu}^n(1) V_{\nu\mu}^n(1)$ kann man wieder mit Weglassung des oberen Index n schreiben:

$$\begin{aligned} H = & \sum_1^n{}_\rho c_\rho p_\rho \cos(\rho N t - \rho\Omega_1 + \eta_\rho) \\ & + \sum_1^n{}_\rho c_\rho q_\rho \sin(\rho N t - \rho\Omega_1 + \eta_\rho), \end{aligned} \qquad 17)$$

wo $\frac{2\pi}{N}$ der Sterntag des Planeten ist und $p_\rho q_\rho$ ihre frühere Bedeutung haben.

Hängt die Function $\frac{1}{k^2}\Gamma$ bloß von p ab, so erhält man gemäß den früher angegebenen Werten von $U^n_{0\nu} V^n_{0\nu}$:

$$P^n_\rho = c^n_0 \frac{(-1)^{n+\rho}}{2^{n-1}\Pi(n+\rho)} \sin\vartheta^\rho \frac{d^{n+\rho}(1-\cos^2\vartheta)^n}{d\cos\vartheta^{n+\rho}} \qquad 18)$$
$$Q^n_\rho = 0.$$

Endlich erhält man den allgemeinen Ausdruck für H, indem man den vorhin gegebenen Wert nach n summiert und die c^n_ν, η^n_ν bestimmt denkt durch:

$$(-i)^\nu c^n_\nu e^{\nu\eta i} =$$
$$= \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(1.3..2n-1)^2}{\Pi(n+\nu)\Pi(n-\nu)} \int \Gamma(\vartheta\varphi) P^n_\nu(\cos\vartheta) e^{\nu\varphi i} do \qquad 19)$$

das Integral erstreckt über die ganze Oberfläche des Planeten, wenn Γ die Reflexionsfähigkeit und ϑ, φ die Richtungswinkel der Normalen.

Unter Annahme des Lambert'schen Gesetzes:

$$f(\cos i, \cos\varepsilon) = \cos i \cos\varepsilon$$

mögen nun die speciellen Werte für $n = 0, 1, 2$ folgen. Zunächst erhält man:

$$H^n_\mu = C^n_\mu . A_\mu \qquad K^n_\mu = 0$$
$$C^n_\mu = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2) P^n_\mu(x) dx \qquad 20)$$
$$A_\mu = \int_{-\frac{\pi-A}{2}}^{+\frac{\pi-A}{2}} (\cos A + \cos 2\varphi) \cos\mu\varphi \, d\varphi.$$

Also im einzelnen:

$$H^0_0 = \frac{2}{3} A_0 \quad H^2_0 = -\frac{4}{45} A_0 \quad A_0 = (\pi - A)\cos A + \sin A$$
$$H^1_0 = 0 \quad H^2_1 = 0 \quad A_1 = \frac{8}{3}\cos^3\frac{A}{2} \qquad 20a)$$
$$H^1_1 = \frac{3\pi}{16} A_1 \quad H^2_2 = \frac{S}{15} A_2 \quad A_2 = \frac{1}{2}(\overline{\pi - A} + \sin A \cos A).$$

$A_0 A_1 A_2$ sind stets alle drei positiv, und es ist: $A_2 > \frac{1}{2} A_0$.

Dies und die in II zusammengestellten Werte der $U_{\nu\mu}^n V_{\nu\mu}^n$ geben nun folgende drei Ausdrücke, entsprechend den Werten $n = 0, 1, 2$, wobei aber der obere Index n der Einfachheit halber unterdrückt ist.

I. $n = 0$.

$$H = \frac{2}{3} c_0 (\pi - A \cos A + \sin A).$$

II. $n = 1$.

$$H = \frac{1}{2} C_0 + C_1 \cos(\psi+\gamma) + S_1 \sin(\psi+\gamma) \qquad \gamma = \omega - \Omega_1$$

$$C_0 = P_0 \cdot q_0 \qquad C_1 = P_1 p_1 + Q_1 q_1$$
$$S_1 = P_1 q_1 - Q_1 p_1$$

$$P_0 = 2 c_0 \cos\vartheta + 2 c_1 \cos\vartheta \cos(\varphi+\eta_1)$$
$$P_1 = -c_0 \sin\vartheta + c_1 \cos\vartheta \cos(\varphi+\eta_1)$$
$$Q_1 = c_1 \sin(\varphi+\eta_1)$$

$$p_0 = -\frac{\pi}{2} \cos^3\frac{A}{2} \cos\omega_1 \sin i_1$$

$$p_1 = -\frac{\pi}{2} \cos^3\frac{A}{2} \cos\omega_1 \cos i_1$$

$$q_1 = +\frac{\pi}{2} \cos^3\frac{A}{2} \sin\omega_1.$$

III $n = 2$.

$$H = \frac{1}{2} C_0 + C_1 \cos(\psi+\gamma) + C_2 \cos 2(\psi+\gamma)$$
$$+ S_1 \sin(\psi+\gamma) + S_2 \sin 2(\psi+\gamma) \qquad \gamma = \omega - \Omega_1$$

$$C_0 = P_0 p_0 \qquad C_1 = P_1 p_1 + Q_1 q_1 \qquad C_2 = P_2 p_2 + Q_2 q_2$$
$$S_1 = P_1 q_1 - Q_1 p_1 \qquad S_2 = P_2 q_2 - Q_2 p_2$$

$$P_0 = c_0(3\cos^2\vartheta - 1) + \frac{3}{2}c_1 \sin 2\vartheta \cos(\varphi + \eta_1) + \\ + 3c_2 \sin^2\vartheta \cos(2\varphi + \eta_2)$$

$$P_1 = -c_0 \sin 2\vartheta + c_1 \cos 2\vartheta \cos(\varphi + \eta_1) + c_2 \sin 2\vartheta \cos(2\varphi + \eta_2)$$

$$Q_1 = c_1 \cos\vartheta \sin(\varphi + \eta_1) + 2c_2 \sin\vartheta \sin(2\varphi + \eta_2)$$

$$P_2 = \frac{1}{2}c_0 \sin^2\vartheta - \frac{1}{4}c_1 \sin 2\vartheta \cos(\varphi + \eta_1) + \\ + \frac{1}{2}c_2(1 + \cos^2\vartheta)\cos(2\varphi + \eta_2)$$

$$Q_2 = -\frac{1}{2}c_1 \sin\vartheta \sin(\varphi + \eta_1) + c_2 \cos\vartheta \sin(2\varphi + \eta_2)$$

$$p_0 = -\frac{2}{45}A_0(3\cos^2 i_1 - 1) + \frac{4}{15}A_2 \sin^2 i_1 \cos 2\omega_1$$

$$p_1 = \frac{1}{15}A_0 \sin 2i_1 + \frac{2}{15}A_2 \sin 2i_1 \cos 2\omega_1$$

$$q_1 = -\frac{4}{15}A_2 \sin i_1 \sin 2\omega_1$$

$$p_2 = -\frac{2}{15}A_0 \sin^2 i_1 + \frac{4}{15}A_2(1 + \cos^2 i_1)\cos 2\omega_1$$

$$q_2 = -\frac{8}{15}A_2 \cos i_1 \sin 2\omega_1$$

$$A_0 = (\pi - A)\cos A + \sin A \qquad A_2 = \frac{1}{2}(\pi - A) + \frac{1}{2}\sin A \cos A.$$

VI.

Überblickt man die gefundene Darstellung von H, sowie die Ausdrücke von $\varphi\psi\vartheta$ in III, so erkennt man sofort, dass der Planet im allgemeinen stets Lichtschwankungen der Periode $\frac{2\pi}{N_1}$ aufweisen wird, die aber zu gewissen Zeiten 0 herabsinken können.

Nimmt man etwa die Oberfläche des Planeten gleichmäßig reflectierend an ($\Gamma = \text{Const}$) und beschränkt sich auf die Werte $n = 0, 1, 2$, so fallen die $n = 1$ entsprechenden Glieder fort, und es wird:

$$\Delta = \frac{1}{4}(P_1^2+Q_1^2)(p_1^2+q_1^2) + \frac{1}{4}(P_2^2+Q_2^2)(p_2^2+q_2^2), \qquad 1)$$

wo die $PQpq$ die in V angeführten Werte besitzen. Es war ferner:

$$\psi = N_1 t + F_1(t) \qquad \varphi = -N_2 t + F_2(t)$$
$$\vartheta = F_3(t), \qquad 2)$$

wo $F_1 F_2 F_3$ periodische Functionen der Periode $\frac{\pi}{N_2}$ sind, so dass ϑ zwischen $\vartheta_0 < \vartheta_1$ hin- und hergeht, wo:

$$\cos\vartheta_0 = \sqrt{\frac{C(G^2-2Ah)}{G^2(C-A)}} \qquad \cos\vartheta_1 = \sqrt{\frac{C(G^2-2Bh)}{G^2(C-B)}}$$

Man kann es nun so einrichten, dass $P_1 Q_1 P_2 Q_2$ als Functionen von $\varphi\vartheta$ oder: $x = \operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}\sin\varphi$, $y = \operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}\cos\varphi$ gemeinsame Nullstellen besitzen und dann die Rotationselemente so wählen, dass die in III bestimmte Curve $X+iY = \frac{c_1+ic_2}{1-c_3}$ durch dieselben hindurchgeht. Man erhält dadurch Zeiten constanter Helle, die regelmäßig im Intervall $\tau = \frac{\pi}{N_2}$ aufeinanderfolgen und bloß entstehen durch eine besondere Lage der Axe der invariablen Ebene relativ zum Körper. Es kann aber auch $\Delta = 0$ werden, wenn etwa

$$p_1 = q_1 = 0 \qquad P_2 = Q_2 = 0.$$

Dieser Fall tritt beispielsweise ein, wenn die genannte Curve durch einen gemeinsamen Nullpunkt von $P_2 Q_2$ hindurchgeht und im gleichen Momente die Ebene der drei Körper Sonne, Planet, Erde parallel der invariablen Ebene ist, da dann $i_1 = 0$ wird.

Es könnten ferner diese Zeiten constanter Helligkeit noch dadurch verlängert werden, dass die Curve Schleifen bildet, in deren Innerem sich ein gemeinsamer Nullpunkt von $P_1 Q_1 P_2 Q_2$ befindet, weil dann diese Größen in den Punkten der Schleife klein sein werden. Im Falle der freien Rotation ist aber die Curve schleifenfrei. Sie könnte jedoch solche vielleicht erhalten, wenn man jene Glieder in $\varphi\,\vartheta$ berücksichtigte, die aus der Wirkung der Sonne hervorgehen.

Außer diesem Falle des zeitweilig aussetzenden Lichtwechsels kann nun aber auch ein bloß zeitweilig eintretender Lichtwechsel statthaben. Der Planet zeigt bloß durch eine gewisse Zeit hindurch Lichtschwankungen, die dann während längerer Zeit wieder verschwinden. Es ist dies der Fall, wenn der Modul q in III an 1 heranrückt und der Körper eine gewisse Symmetrie bezüglich der Axe des mittleren Trägheitsmomentes B zeigt. Es soll nämlich angenommen werden, dass längs der Curven:

$$\frac{\Gamma}{k^2} = \text{Const}$$

die Flächennormalen gleich viel gegen die Axe B geneigt seien. Offenbar ist dann:

$$\frac{\Gamma}{k^2} = f(\sin p \,.\, \sin l). \qquad 3)$$

Es sei also f nach Kugelfunctionen entwickelt etwa gleich

$$\frac{\Gamma}{k^2} = \sum_n C_n P_0^n (\sin p \,\sin l), \qquad 3a)$$

worin:

$$P_0^n(x) = \frac{\Pi(n)}{\Pi(2n)} \frac{d^n (1-x^2)^n}{dx^n}.$$

Diesen Ausdruck hat man nun in die Form zu bringen:

$$\sum_{0}^{\infty}{}_n \sum_{0}^{n}{}_\nu c_\nu^n \cos(\nu l - \gamma_\nu^n) P_\nu^n (\cos p).$$

Diese Entwickelung geben aber sofort die Transformationsformeln in II für: $\psi = 0$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, indem hiedurch die XYZ-Axe beziehungsweise zur ZXY-Axe des neuen Coordinatensystemes wird. Es folgt:

$$c_\nu^n = C_n U_{0\nu}^n(0) \quad (\text{für } \nu = 0 \text{ die Hälfte})$$

$$\gamma_\nu^n = \nu \frac{\pi}{2}.$$

Daher gehen die $P_\rho^n Q_\rho^n$ in V über in folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} P_\rho^n &= C_n \sum_0^n{}' U_{0\nu}^n(0)\, U_{\nu\rho}^n(\cos\vartheta)\, \cos\nu\varphi \\ Q_\rho^n &= C_n \sum_0^n{}' U_{0\nu}^n(0)\, V_{\nu\rho}^n(\cos\vartheta)\, \sin\nu\varphi \end{aligned} \qquad 4)$$

Diese Ausdrücke summieren sich aber mit Hilfe der Additionsformel in II. Dieselbe ergibt nämlich bei leicht zu ersehender Specialisierung:

$$\begin{aligned} P_\rho^n &= C_n U_{0\rho}^n(\cos\zeta)\, \cos\rho\chi \\ Q_\rho^n &= C_n U_{0\rho}^n(\cos\zeta)\, \sin\rho\chi, \end{aligned} \qquad 5)$$

wenn

$$\begin{aligned} \sin\zeta\cos\chi &= \cos\vartheta\cos\varphi \\ \sin\zeta\sin\chi &= \sin\varphi \\ \cos\zeta &= \sin\vartheta\cos\varphi \end{aligned}$$

Es sind also $\chi\zeta$ die in III bereits als Functionen der Zeit bestimmten Winkel. Somit ist, wenn $p_\rho^n q_\rho^n$ wieder die im vorigen Abschnitte angegebenen Größen sind:

$$H = \sum_n^\infty \sum_\rho^n{}' C_n U_{0\rho}^n(\cos\zeta)\{p_\rho^n \cos\rho(\Psi+\gamma) + q_\rho^n \sin\rho(\Psi+\gamma)\}.$$

Oder endlich:

$$H = \sum_{\rho}' (C_\rho \cos \rho(\Psi+\gamma) + S_\rho \sin \rho(\Psi+\gamma)) \qquad 6)$$

$$C_\rho = \sum_{n}^{\rho}{}^{\infty} C_n U_{0\rho}^n(\cos\zeta)\, p_\rho^n$$

$$S_\rho = \sum_{n}^{\rho}{}^{\infty} C_n U_{0\rho}^n(\cos\zeta)\, q_\rho^n. \qquad 6a)$$

Dabei hat man aus II für $U_{0\rho}^n(\cos\zeta)$ unter anderen folgende Darstellungen:

$$U_{0\rho}^n(\cos\zeta) = \frac{(-1)^{n+\rho}}{2^{n-1}\Pi(n+\rho)} \sin^\rho\zeta \frac{d^{n+\rho}(1-\cos^2\zeta)^n}{d\cos\zeta^{n+\rho}}$$

$$= 2\frac{(-1)^\rho \Pi(n)}{\Pi(\rho)\Pi(n-\rho)} \operatorname{tg}^\rho\frac{1}{2}\zeta \cos^{2n}\frac{1}{2}\zeta\, F\left(-n,-n+\rho,\rho+1,-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\zeta\right). \qquad 7)$$

Es enthält hienach C_ρ und S_ρ den Factor $\sin^\rho\zeta$, und es werden daher beide von $\rho = 1$ angefangen mit ζ zugleich sehr klein und desto rascher, je größer ρ ist; gleichzeitig werden dann natürlich die kurzperiodischen Schwankungen von H immer kleiner und kleiner. Rückt man q nahe an 1 heran, so wird ζ ein Winkel, der einer Libration derart unterworfen ist, dass er von $\frac{\pi}{2}$ rasch gegen 0, beziehungsweise π herabsinkt, also $\sin\zeta$ während einer Periode im allgemeinen klein ist und ein rasch ansteigendes Maximum 1 besitzt.

Zunächst haben die in III gegebenen Ausdrücke die Form:

$$\Psi = (N_1 - N_2)t + F(t) \qquad \zeta = F_1(t), \qquad 8)$$

wobei $F(t)$ die Periode $\frac{\pi}{N_2}$ und $F_1(t)$ die Periode $\frac{2\pi}{N_2}$ hat. Es folgt ferner aus ihnen, dass ζ zwischen ζ_0 und $\pi-\zeta_0$ hin- und herschwankt derart, dass $\cos\zeta$ die Periode $\frac{2\pi}{N_2}$ und $\sin\zeta$ die Periode $\frac{\pi}{N_2}$ besitzt und wobei man für ζ_0 hat:

$$\sin\zeta_0 = -i\sqrt{e_1-e_2}\,\frac{\sigma}{\sigma_1}(is) = \sqrt{\frac{C(G^2-2Bh)}{G^2(C-B)}} \tag{9}$$

$$0<\zeta_0<\frac{\pi}{2}.$$

Es wird also ζ_0 klein mit G^2-2Bh; dies wieder gibt einen Wert von k also auch von q, der gegen 1 hin strebt.

Bezeichnet jetzt τ_1 die kurze Periode des Lichtwechsels, τ_2 die Zwischenzeit von einem maximalen Lichtwechsel bis zum nächstfolgenden, d. i. die Zeit von einem Durchgange von ζ durch $\frac{\pi}{2}$ bis zum nächsten, endlich τ_3 die Zeit, innerhalb der der Winkel ζ von $\frac{\pi}{2}$ auf ζ oder $\pi-\zeta$ herabsinkt, so ist:

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{N_1-N_2} = \frac{2\pi}{N_1} \qquad \tau_2 = \frac{\pi}{N_2},$$

und zur Bestimmung von $N_1N_2\tau_3$ hat man nach Abschnitt III

$$k^2 = \frac{B-A}{C-B}\cdot\frac{2hC-G^2}{G^2-2Ah} \qquad k'^2 = \frac{C-A}{C-B}\cdot\frac{G^2-2Bh}{G^2-2Ah}$$

$$\xi^2 = \frac{C(G^2-2Ah)}{G^2(C-A)}$$

$$\alpha^2 = \frac{(C-B)(G^2-2Ah)}{ABC} \qquad \sin\zeta_0 = \frac{C(G^2-2Bh)}{G^2(C-B)}$$

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \qquad E = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx \tag{10}$$

$$N_1 = \frac{2h}{G} + \frac{\alpha}{K}\int_0^{\xi}\frac{(E-k'^2Kx^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}$$

$$N_2 = \frac{\alpha\pi}{2K}$$

$$\tau_3 = \frac{1}{\alpha}\int_{\cos\zeta_0}^{\cos\zeta}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Man kann hieraus ersehen, dass sich zunächst für $N_1 N_2$ beliebige Werte festsetzen lassen, und zwar soll N_1 sehr groß gegen N_2 sein, und sich hinterher $G^2 - 2Bh$, also k', so klein wählen lässt, dass nach Ablauf einer beliebig kleinen Zeit τ_3 der Winkel ζ einen ebenfalls beliebig klein vorgeschriebenen Wert $\zeta > 0$ erreicht. Es könnte höchstens der Fall eintreten, dass dabei ein Trägheitsmoment negativ wird, und man müsste $\frac{N_1}{N_2}$ dann vergrößern.

Um dies deutlicher zu machen, wird man die Zwischenelemente N_1, N_2, q, ε einführen. Da aber q nahe an 1 liegen soll, so werden die trigonometrischen Reihen zwar noch immer, aber langsam convergieren. Diesem Übelstande kann dadurch abgeholfen werden, dass man vermöge linearer Periodentransformation der ϑ-Functionen ganz ebensolche Reihen wie in III ableitet, in denen aber q_1 statt q auftritt, wobei

$$\log \frac{1}{q} \cdot \log \frac{1}{q_1} = \pi^2$$

ist.

Diese Reihen schreiten dann aber nicht nach Kreis-, sondern nach Hyperbelfunctionen fort und convergieren bloß in einem endlichen Intervall. Man kann nun zwar wegen der Periodicitätseigenschaft der zu berechnenden Winkel ihre Bestimmung für jede Zeit ausführen, es bleibt aber dennoch die verlangsamte Convergenz bei Annäherung an die Grenze des Intervalles misslich. Es lassen sich aber beständig convergente Ausdrücke erhalten, wenn man die ϑ-Functionen nach der Transformation selbst entwickelt, ohne die Quotienten auszuführen. Auf diese Weise folgt sofort:

$$\Psi = \frac{\pi}{2} + \left(N_1 - \frac{2N_2 S}{\pi}\right) t - \operatorname{arctg} 2 \cdot \frac{q_1 \sin 2S \sinh 2at - q_1^4 \sin 4S \sinh 4at + q_1^9 \sin 6S \sinh 6at - \dots}{1 - 2q_1 \cos 2S \cosh 2at + 2q_1^4 \cos 4S \cosh 4at - 2q_1^9 \cos 6S \cosh 6at + \dots} \quad 11)$$

$$\cos\zeta = \frac{1+2q_1\cos 2S+2q_1^4\cos 4S+2q_1^9\cos 6S+\dots}{1-2q_1\cos 2S+2q_1^4\cos 4S-2q_1^9\cos 6S+\dots}\cdot$$

$$\cdot\frac{\sin h.at-q_1^{1\cdot 2}\sin h.3at+q_1^{2\cdot 3}\sin h.5at-\dots}{\cos h.at+q_1^{1\cdot 2}\cos h.3at+q_1^{2\cdot 3}\cos h.5at+\dots}, \qquad 12)$$

Dabei ist:

$$\sin h\ x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad \cos h.x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

ferner:

$$S = \frac{\pi\alpha s}{2K'} \qquad a = \frac{\pi\alpha}{2K'}$$

Da nun $q_1 = e^{-\pi\frac{K}{K'}}$, so wird, wenn man setzt:

$$\lambda = \frac{1}{\pi}\log\frac{1}{q_1},$$

sein:

$$a = N_2\lambda \qquad q_1 = e^{-\pi\lambda} \qquad \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} = e^{-\frac{\pi}{\lambda}}. \qquad 13)$$

Man kann daher als die vier Elemente nehmen die Größen:

$$N_1,\ N_2,\ S,\quad q_1 \text{ oder } \lambda \qquad 0 < S < \frac{\pi}{2}.$$

Durch diese vier Elemente lassen sich dann die mechanischen Constanten:

$$\frac{G}{A} \quad \frac{G}{B} \quad \frac{G}{C} \quad \frac{2h}{G}$$

nach III bestimmen. Vernachlässigt man q_1^4, so geben die Schlussformeln von III:

$$\frac{2h}{G} = N_1 - \frac{2N_2 S}{\pi} - 4N_2\lambda\left(\frac{q_1}{1-q_1^2}\sin 2S + q_1^2 \sin 4S + q_1^3 \sin 6S\right)$$

$$\frac{G}{A} = N_1 - \frac{2N_2 S}{\pi} + N_2\lambda \operatorname{tg} S + 4N_2\lambda q_1^2 \sin 2S$$

$$\frac{G}{B} = N_1 - \frac{2N_2 S}{\pi} + 4N_2\lambda\left(\frac{q_1}{1-q_1^2}\sin 2S - q_1^2 \sin 4S + q_1^3 \sin 6S\right) \qquad 14)$$

$$\frac{G}{C} = N_1 - \frac{2N_2 S}{\pi} - N_2\lambda \operatorname{ctg} S - 4N_2\lambda q_1^2 \sin 2S.$$

Endlich hat man noch für τ_3:

$$\tau_3 = \frac{\pi}{2N_2 K}\int_0^{\frac{\cos\zeta}{\cos\zeta_0}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$\sqrt{k'} = 2q_1^{1/4}\,\frac{1+q_1^2+q_1^6+\ldots}{1+2q_1+2q_1^4+\ldots} \qquad 15)$$

$$K' = \frac{\pi}{2}(1+2q_1+2q_1^4+\ldots)^2 \qquad K = \lambda . K'$$

$$\sin\zeta_0 = 4\sqrt[4]{q_1}\,\frac{(1+q_1^6+q_1^6+\ldots)(\sin S - q_1^2\sin 3C + q_1^6\sin 5S - \ldots}{(1+2q_1+2q_1^4+\ldots)(1-2q_1\cos 2S+2q_1^4\sin 4S+\ldots)}.$$

Ferner war schon früher angegeben, dass man die dem Falle:

$$\frac{G}{A} > \frac{2h}{G} > \frac{G}{B} > \frac{G}{C}$$

entsprechenden Formeln dadurch erhält, dass man $\omega+\omega'$ statt ω setzt, wodurch $\sigma\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ in $\sigma\sigma_2\sigma_1\sigma_3$ übergehen.

Man kann diesen Fall $G^2-2hB<0$ aber auch dadurch erhalten, dass man s, somit auch S negativ nimmt. Nur wird dann nicht mehr $A<B<C$, sondern $A>B>C$ sein.

VII.

Schließlich mögen noch die entwickelten Gleichungen auf ein einfaches numerisches Beispiel Anwendung finden. Es wird dieses aber bei der Mannigfaltigkeit der Möglichkeiten — es traten ja 12 die Form und Rotation des Körpers bestimmende Constanten auf — eine nur sehr specielle Veranschaulichung bieten können, so dass in Wirklichkeit die Verhältnisse vielleicht ganz verschiedene sein können.

Bezüglich der Form des Körpers soll eine derartige Symmetrie bezüglich einer willkürlichen Axe angenommen werden, dass $\frac{\Gamma}{k^2}$ bloß von der Neigung der Flächennormale gegen eben diese Axe abhängt (z. B. ein Rotationskörper). Allemal, wenn diese Axe bei der Rotationsbewegung des Körpers normal zur invariablen Ebene zu stehen kommt, wird dann der Lichtwechsel aussetzen.

Hat nun diese Axe im System der Hauptaxen des Körpers die Länge α, die Poldistanz ε und ist π die Neigung der Flächennormale gegen dieselbe, so wird zunächst sein:

$$\frac{\Gamma}{k^2} = \sum_0^\infty{}_n C_n P_0^n(\cos\pi), \qquad 1)$$

und man wird, um auf die Hauptaxen überzugehen, in den Transformationsformeln zu setzen haben:

$$\psi = \text{willkürlich} \qquad \varphi = \pi - \alpha \qquad \vartheta = -\varepsilon,$$

wodurch man erhält:

$$\frac{\Gamma}{k^2} = \sum_0^\infty{}_n \sum_0^{n\prime}{}_\mu A_\mu^n \cos\mu(l-\alpha) P_\mu^n(\cos\pi) \qquad 2)$$

$$A_\mu^n = C_n U_{0\mu}^n(\cos\varepsilon).$$

Also hat man zu nehmen:

$$c_\nu^n = C_n U_{0\nu}^n(\cos\varepsilon) \qquad \gamma_\nu^n = \nu\alpha$$

(für $\nu = 0$ die Hälfte).

Diese Werte geben für die Coefficienten $P_1 Q_1$:

$$P_\rho^n = \sum_\nu (-1)^\nu C_n U_{0\nu}^n(\cos\varepsilon) U_{\nu\rho}^n(\cos\vartheta) \cos\nu\left(\varphi+\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$Q_\rho^n = \sum_\nu (-1)^\nu C_n U_{0\nu}^n(\cos\varepsilon) V_{\nu\rho}^n(\cos\vartheta) \sin\nu\left(\varphi+\alpha+\frac{\pi}{2}\right).$$

Oder:

$$\begin{aligned} P_\rho^n &= (-1)^{n+\rho} C_n U_{0\rho}^n(\cos\zeta) \cos\rho\chi \\ Q_\rho^n &= (-1)^{n+\rho} C_n U_{0\rho}^n(\cos\zeta) \sin\rho\chi \end{aligned} \qquad 3)$$

worin:

$$\begin{aligned} \cos\zeta &= -\cos\varepsilon\cos\vartheta - \sin\varepsilon\sin\vartheta\sin(\alpha+\varphi) \\ \sin\zeta\cos\chi &= \cos\varepsilon\sin\vartheta - \sin\varepsilon\cos\vartheta\sin(\alpha+\varphi) \qquad 3a) \\ \sin\zeta\sin\chi &= \sin\varepsilon\cos(\alpha+\varphi). \end{aligned}$$

Mit diesen Ausdrücken lässt sich sofort die Helligkeit H in die Gestalt setzen:

$$H = \sum_n \sum_\rho R_\rho^n (p_\rho^n \cos\rho(\psi-\Omega_1+\chi) + q_\rho^n \sin\rho(\psi-\Omega_1+\chi)) \qquad 4)$$

$$R_\rho^n = (-1)^{n+\rho} C_n U_{0\rho}^n(\cos\zeta). \qquad 4a)$$

Beschränkt man sich jetzt auf die Werte $n = 0, 1, 2$ und nimmt die Reflexionsfähigkeit als constant an, wodurch $C_1 = 0$ wird, so hat man:

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2} c_0 &+ c_1\cos(\psi-\Omega_1+\chi) + c_2\cos(\psi-\Omega_1+\chi) \\ &+ s_1\sin(\psi-\Omega_1+\chi) + s_2\sin(\psi+\Omega_1+\chi) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} c_0 = \frac{2}{3} A_0 C_0 + \frac{1}{2} R_0 p_0 \qquad 5)$$

$$\begin{aligned} c_1 &= R_1 p_1 \qquad & s_1 &= R_1 q_1 \qquad & R_0 &= C_2(3\cos^2\zeta - 1) \\ c_2 &= R_2 p_2 \qquad & s_2 &= R_2 q_2 \qquad & R_1 &= C_2 \sin 2\zeta \\ & & & & R_2 &= \frac{1}{2} C_2 \sin^2\zeta. \end{aligned}$$

Dabei haben die $p\,q$ die bereits früher angegebenen Werte, und es ist ferner:

$$\frac{\Gamma}{k^2} = C_0 + C_2\left(\cos^2\pi - \frac{1}{3}\right). \tag{6}$$

Nimmt man etwa ein Rotationsellipsoid an, so sei:

$$\eta = \frac{a^2-b^2}{a^2},$$

und es wird:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\Gamma a^2} C_0 &= 1+(1-\eta)J \\ \frac{24}{45\Gamma a^2} C_2 &= \frac{(3-\eta)(-3+\eta)(1-\eta)J}{\eta} \\ J &= \frac{1}{2\sqrt{\eta}} \log\frac{1+\sqrt{\eta}}{1-\sqrt{\eta}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-\eta}} \operatorname{arctg}\sqrt{-\eta} \end{aligned} \tag{6a}$$

und wenn η sehr klein: $\gamma = \frac{C_2}{C_0} = 2\eta = 4\alpha$, $\alpha = \frac{a-b}{a}$.

Es muss ferner $\frac{\Gamma}{K^2} > 0$ sein, also: $-\frac{3}{2} < \gamma < 3$.

Endlich möge des weiteren angenommen werden, dass zwei der Hauptaxen gleich sind: $A = B$. Dann wird einfach:

$$\begin{aligned} \psi = N_1 t \qquad \varphi = -N_2 t \qquad \vartheta = \text{const} \\ \frac{C-A}{C} = \frac{N_2}{N_1}\cos\vartheta. \end{aligned} \tag{7}$$

Nun möge gesetzt werden: $\varepsilon = \vartheta = 45°$, also:

$$\cos\frac{\zeta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\varphi}{2} \quad \text{für} \quad \alpha = \frac{3\pi}{2}.$$

Man sieht, dass stets, wenn $\zeta = \pi$ wird, sämmtliche R, also überhaupt der Lichtwechsel, verschwindet, ferner ist nahezu bei $\zeta = \frac{\pi}{2}$ stärkster Lichtwechsel. Hiebei verschwindet aber R_1, beziehungsweise ist es klein wegen des Factors $\cos\zeta$,

d. h. die Lichtcurve weicht wenig von einer Sinuscurve ab, die zwei Maxima und zwei Minima in jeder Periode besitzt. Da endlich $c_2 s_2$ den Factor $\sin^2 \zeta$, dagegen $c_1 s_1$ nur $\sin \zeta$ enthalten, wird beim Verschwinden des Lichtwechsels sich die Lichtcurve immer mehr einer Sinuscurve mit einem Maximum und einem Minimum innerhalb einer Periode nähern.

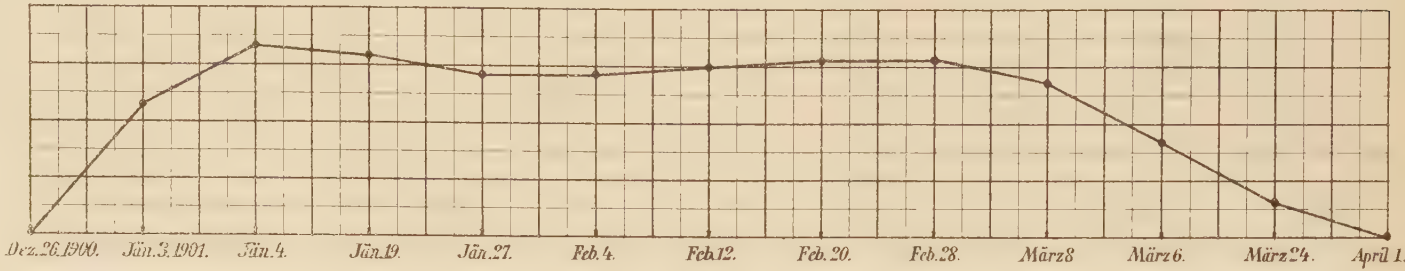

Fig. 8.

Für die numerische Ausrechnung wurde weiter als der beleuchtete Körper der Planet Eros gewählt und seine Coordinaten der Ephemeride von Millosevich (A. N. 3662) entnommen. Da der Erdäquator keinerlei ausgezeichnete Lage gegen die Bahnebenen von Erde und Eros besitzt, so ist $i = 0$ angenommen, d. h. die invariable Ebene ist dem Erdäquator parallel. Für den Winkel φ wurde die Periode von 96 Tagen gewählt und derselbe gleich 0 angenommen für Februar 12. Hieraus und aus den entsprechenden Sonnencoordinaten bestimmten sich die in V auftretenden Größen von acht zu acht Tagen und schließlich folgte daraus die früher eingeführte Größe:

$$\Delta^2 = M(H^2) - (MH)^2,$$

deren Verlauf die gezeichnete Curve veranschaulicht.

	α_1	δ_1	α_2	δ_2	lg r	lg r_1	lg Δ	A	a
Jänner 3	283°5	—22°9	32°4	37°1	9·9926	0·0660	9·5001	48°5	46°3
11	292·2	—21·9	38·0	34·0	27	14	054	51·2	57·1
19	300·9	—20·4	44·5	30·2	30	0579	144	53·5	67·0
27	309·2	—18·6	51·4	26·9	34	55	271	55·4	76·2
Februar 4	317·5	—16·3	58·8	23·7	39	44	431	56·7	84·5
12	325·4	—13·8	66·2	20·5	45	45	625	57·6	91·8
20	333·2	—11·1	73·7	17·5	52	59	849	58·0	97·6
28	340·8	— 8·1	81·1	14·7	60	84	6100	58·1	101·5
März 8	348·2	— 5·0	88·4	12·0	69	0621	370	57·8	102·0
16	355·6	— 1·9	95·6	9·6	79	69	658	57·2	97·0
24	2·9	+ 1·2	102·6	7·3	89	0725	958	56·5	83·6
April 1	10·1	+ 4·4	109·5	5·2	99	89	7265	55·5	64·0

	d	α	δ	i_1	ω_1	φ	ζ	Δ	
Jänner 3	—52°1	242°5	—36°8	142°1	192°9	150°	158°9	0·23	
11	—54·9	248·8	—34·6	144·9	189·6	120	138·6	0·33	
19	—57·7	255·5	—32·0	147·8	187·2	90	120·0	0·32	
27	—60·8	262·6	—29·1	150 8	185 6	60	104·5	0·29	
Februar 4	—64·1	269·8	—25·8	154·0	184·7	30	93·8	0·29	
12	—67·5	276·9	—22·5	157·5	184·8	0	90·0	0·30	
20	—70·9	284·0	—19·0	160·9	186·1	330	93·8	0·31	
28	—74·4	291·0	—15·4	164·4	189·2	300	104·5	0·31	
März 8	—77·6	297·8	—11·9	167·6	195·5	270	120·0	0·27	
16	—80·4	304·4	— 8·5	170·4	207·1	240	138·6	0·17	
24	—82·3	310·8	— 5·3	172·3	226·9	210	158·9	0·06	
April 1	—82·6	317·0	— 2·2	172·6	252·9	180	180·0	0·00	

Um über die Größe des Lichtwechsels eine Vorstellung zu gewinnen, bemerke man, dass z. B. für Februar 12 folgt:

$$H = 1{\cdot}33\,C_0 - 0{\cdot}11\,C_2 + 0{\cdot}30\,C_2 \sin 2N_1 t.$$

Also:

$$\frac{H_{\max}}{H_{\min}} = \frac{1+0{\cdot}14\gamma}{1-0{\cdot}31\gamma} \text{ für } \gamma > 0 \qquad = \frac{1+0{\cdot}31\gamma}{1-0{\cdot}14\gamma} \text{ für } \gamma < 0.$$

Für eine Schwankung von einer Größenclasse folgt:

$$\gamma = 1{\cdot}6 \quad \text{oder} \quad \gamma = -2{\cdot}3,$$

welcher zweite Wert nicht mehr die Bedingung erfüllt:

$$-\frac{3}{2} < \gamma < 3.$$

Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

Aus den Denkschriften 64. Bd. (1897).

Unterweger, J., Über zwei trigonometrische Reihen für Sonnenflecken. Kometen und Klimaschwankungen. (Vorläufige Mittheilung.) (Mit 1 Tafel.) . . . . . — K 90 h

Spitaler, R., Bahnbestimmung des Kometen 1890 VII (Spitaler). (Mit 1 Textfigur.) 1 K 40 h

Junker, F., Die symmetrischen Functionen der gemeinschaftlichen Variablenpaare ternärer Formen. Tafeln der ternären symmetrischen Functionen vom Gewicht 1 bis 6. 5 K 80 h

Brenner L., Jupiterbeobachtungen an der Manora-Sternwarte 1895—1896. (Mit 8 Tafeln.) 7 K 60 h

Spitaler, R., Die Ursache der Breitenschwankungen. (Mit 1 Karte und 1 Textfigur.) 1 K 40 h

Thraen, A., Bestimmung der Bahn des periodischen Kometen von Wolf (Komet 1884 III und 1891 II). Verbindung der Erscheinungen in den Jahren 1884 und 1891 und Vorausberechnung des Laufes des Kometen für die Erscheinung im Jahre 1898. 2 K 60 h

Aus den Sitzungsberichten 106. Bd. (1897).

Binder, W., Die Undulationen ebener Curven C_6^3. (I. Mittheilung.) (Mit 12 Tafeln.) 1 K 40 h

Daublebsky v. Sterneck, R., Über einen Satz der additiven Zahlentheorie. . . — K 20 h

— Empirische Untersuchung über den Verlauf der zahlentheoretischen Function $\sigma(u) \sum_{x=1}^{x=n} \mu(x)$ im Intervalle von 0 bis 150000. (Mit 1 Tafel.) . . . . . 3 K 50 h

Kohn, G., Über räumliche Poncelet'sche Polygone. . . . . — K 20 h

Mertens, F., Über Dirichlet's Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte ganzzahlige arithmetische Progression, deren Differenz zu ihren Gliedern theilerfremd ist, unendlich viele Primzahlen enthält. . . . . — K 70 h

— Über einen asymptotischen Ausdruck. . . . . — K 30 h

— Über einen algebraischen Satz. . . . . — K 30 h

— Über eine zahlentheoretische Function. . . . . 1 K 10 h

Sporer, B., Über den Feuerbach'schen Kreis. (Mit 4 Textfiguren.) . . . . . — K 40 h

Stolz, O., Zwei Grenzwerte, von welchen das obere Integral ein besonderer Fall ist. — K 40 h

Waelsch, E., Über Flächen mit Liouville'schem Bogenelement. . . . . — K 20 h

Zindler, K., Über die Differentiation mehrfacher Integrale nach einem Parameter, von dem auch die Grenzen abhängen. . . . . — K 20 h

Aus den Denkschriften 67. Bd. (1898).

Hillebrand, C., Die Erscheinung 1892 des periodischen Kometen Winnecke. . . 2 K — h

Palisa, J. und **Bidschof, F.,** Katalog von 1238 Sternen, auf Grund der in den Bänden I und II der Publicationen der v. Kuffner'schen Sternwarte in Wien (Ottakring) enthaltenen Meridiankreisbeobachtungen. . . . . 3 K 90 h

Schobloch, A., Bahnbestimmung des Kometen 1847 V (Brorsen). . . . . 1 K — h

Aus den Sitzungsberichten 107. Bd. (1898).

Binder, W., Die Undulationen ebener Curven C_6^3. (II. Mittheilung.) (Mit 4 Tafeln.) . — K 80 h

— Die Tangentenprobleme der Kreis-Epicycloide mit Doppelpunkt. (Mit 2 Tafeln.) — K 70 h

Carda, K., Zur Geometrie auf Flächen constanter Krümmung. (Mit 4 Textfiguren.) — K 40 h

Escherich, G. v., Die zweite Variation der einfachen Integrale. (I. Mittheilung.) . 1 K 10 h

— Die zweite Variation der einfachen Integrale. (II. Mittheilung.) . . . . . 1 K 10 h

— Die zweite Variation der einfachen Integrale. (III. Mittheilung.) . . . . — K 90 h

Grabowski, L., Einige Bemerkungen zur Erklärung der Polbewegung. (Mit 1 Tafel und 1 Textfigur.) . . . . . — K 40 h

Hepperger, J. v., Bahnbestimmung des Biela'schen Kometen aus den Beobachtungen während der Jahre 1826 bis 1832. . . . . 2 K 20 h

Hnatek, A., Die Meteore des 20. bis 30. November mit besonderer Berücksichtigung der Bieliden. . . . . — K 80 h

Kohn, G., Über Tetraëder in schiefperspectivischer Lage. . . . . — K 30 h

Lauermann, K., Zum Normalenproblem der Hyperbel. (Mit 1 Tafel.) . . . . . — K 40 h
Mertens, F., Über eine Eigenschaft der Riemann'schen ζ-Function. . . . . — K 10 h
Oekinghaus, E., Über die Zunahme der Dichtigkeit, Abplattung und Schwere im Innern der Erde auf Grundlage einer neuen Hypothese. . . . . — K 90 h
Oppolzer, E. v., Die photographische Extinction. (Mit 1 Textfigur.) . . . . . — K 40 h
Sobotka, J., Beitrag zur infinitesimalen Geometrie der Integralcurven. (Mit 13 Textfiguren.) 1 K 20 h
Stolz, O., Zur Erklärung der absolut convergenten uneigentlichen Integrale. . . — K 40 h
— Eine neue Form der Bedingung zur Integrirbarkeit einer Function einer Veränderlichen. . . . . —. K 10 h

Aus den Denkschriften 68. Bd. (1899).

Rudolph, H., Über die Ursache der Sonnenflecken. . . . . 1 K 40 h
Scheller, A., Definitive Bestimmung der Bahn des Kometen 1845 II (De Vico). . 2 K 50 h
Tinter, W., Bestimmung des Azimutes der Richtung: Observatorium der k. k. technischen Hochschule Wien (Punkt 4) — Leopoldsberg und Bestimmung der Meereshöhe einzelner Punkte des Observatoriums. . . . . 1 K 10 h

Aus den Sitzungsberichten 108. Bd. (1899).

Cohn, B., Definitive Bahnbestimmung des Kometen 1853 I. . . . . — K 60 h
Escherich, G. v., Über Systeme von Differentialgleichungen I. Ordnung. . . . . 1 K — h
— Die zweite Variation der einfachen Integrale. (IV. Mittheilung.) . . . . 1 K 30 h
Gegenbauer, L., Über transcendente Functionen, deren sämmtliche Wurzeln transcendente Zahlen sind. . . . . — K 30 h
Grünwald, J., Über die Raumcurven vierter Ordnung zweiter Art und die zu ihnen perspectiven Curven. (Mit 1 Textfigur.) . . . . . — K 90 h
Kohn, G., Über die Oktaëderlage und die Ikosaëderlage von zwei cubischen Raumcurven. — K 20 h
Mertens, F., Eine asymptotische Aufgabe. . . . . — K 20 h
— Zur Theorie der symmetrischen Functionen. . . . . — K 10 h
— Beweis, dass jede lineare Function mit ganzen complexen theilerfremden Coëfficienten unendlich viele complexe Primzahlen darstellt. . . . . — K 70 h
— Zur Theorie der Elimination (I. Theil). . . . . 1 K — h
— Zur Theorie der Elimination (II. Theil). Anwendungen. . . . . — K 80 h
Niessl, G. v., Bahnbestimmung des großen Meteors vom 20. November 1898. . . — K 50 h
Stolz, O., Über die absolute Convergenz der uneigentlichen bestimmten Integrale. (II. Mittheilung.) . . . . . — K 10 h
Weinek, L., Berghöhenbestimmung auf Grund des Prager photographischen Mondatlas. (Mit 5 Textfiguren.) . . . . . — K 40 h
— Über die beim Prager photographischen Mondatlas angewandte Vergrößerungsmethode. (Mit 1 Textfigur.) . . . . . — K 40 h
Wirtinger, W., Zur Theorie der automorphen Functionen von n Veränderlichen. — K 30 h

Aus den Sitzungsberichten 109. Bd. (1900).

Biermann, O., Über die Discriminante einer in der Theorie der doppelt periodischen Functionen auftretenden Transformationsgleichung. . . . . — K 30 h
Daublebsky v. Sterneck, R., Zur additiven Zahlentheorie . . . . . — K 35 h
— Zur Tschebyschef'schen Primzahlentheorie. . . . . — K 50 h
Gegenbauer, L., Einige Sätze über die reellen Wurzeln der Integrale von homogenen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. . . . . — K 35 h
Hepperger, J. v., Bahnbestimmung des Biela'schen Kometen aus den Beobachtungen während der Jahre 1845 und 1846. . . . . 1 K 50 h
Holetschek, J., Über die Unsichtbarkeit von Kometen für den Äquator und für höhere geographische Breiten. . . . . 1 K 70 h
Mertens, F., Über einen Satz von Dirichlet. . . . . 1 K 20 h
Niessl, G. v., Bahnbestimmung des Meteors vom 19. Februar 1899. . . . . — K 60 h
Oppolzer, E. v., Über den Zusammenhang von Refraction und Parallaxe. (Mit 1 Textfigur.) — K 20 h
Schobloch, A., Zur Statistik der Kometenbahnen. (Mit 2 Textfiguren.) . . . . — K 60 h
Sobotka, J., Beitrag zur Perspective des Kreises und anschließend zur Construction der Axen und Kreisschnitte für Flächen zweiten Grades. (Mit 1 Tafel.) . . . — K 85 h